

L3 Algèbre effective – examen

14 décembre 2016

Tout document et appareil électronique interdit

Justifier chaque réponse

Syntaxe Sagemath - Python

- 1.a. Ecrire une commande donnant la liste des éléments non nul d'une suite finie u donnée sous forme de liste.
- 1.b. Ecrire une commande donnant la liste des couples (i, j) tels que $i < j$ et $u_i > u_j$, où u est donné sous forme de liste et où (i, j) peut être rendu sous forme de liste $[i, j]$
- 1.c. Ecrire une commande donnant la liste des diviseurs positifs d'un entier non nul a .
- 1.d. Ecrire une commande donnant la liste des diviseurs positifs commun de deux entiers non nuls a, b .

Algorithme et preuve d'algorithme

2.a Donner une preuve de terminaison de l'exécution de la commande $f(n)$ où n est un entier déjà défini et où f est la fonction définie ci-dessous. Que vaut $f(n)$? Pouvez vous en donner une preuve ?

```
def f(n):  
    if n%2 != 0: return(1)  
    else: return(2*f(n/2))
```

2.b Donner une preuve de terminaison de l'exécution de la commande $g(k, l)$ où k, l sont deux entiers positifs déjà définis et où g est la fonction définie ci-dessous. Que vaut alors $g(k, l)$? Que se passe-t-il si k, l sont deux entiers pas nécessairement positifs ?

```
def g(k, l):  
    if l==0: return(1)  
    elif k<1: return(0)  
    else: return(g(k-1, l)+g(k-1, l-1))
```

Arithmétique et algèbre linéaire sur les entiers

3.a. A t-on $12\mathbb{Z} + 15\mathbb{Z} + 21\mathbb{Z} = 18\mathbb{Z} + 39\mathbb{Z} + 24\mathbb{Z}$ vus comme sous-groupes de \mathbb{Z} ?

3.b Quel est le plus petit entier $n > 0$ du sous groupe $H = 12\mathbb{Z} + 30\mathbb{Z} + 45\mathbb{Z} + 54\mathbb{Z}$ de \mathbb{Z} ? Quel est le plus petit entier $m > n$ de H ?

4. Calculer la forme de Smith (avec matrices de passage) de

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

L'application $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2, (x, y) \mapsto (4x + 6y, 6x + 3y)$ est elle injective ? Surjective ?

5. Montrer que l'application $\mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^2, (x, y, z) \mapsto (x + 3y, x + 4z)$ est surjective.

A quelle condition sur les entiers k, l l'application $(x, y, z) \mapsto (x + ky, x + lz)$ est elle surjective ?

6. Soit (e_1, e_2, e_3) une famille de vecteurs de \mathbb{Z}^4 et soit M la matrice des coordonnées des e_i dans la base canonique de \mathbb{Z}^4 .

On suppose que la forme de Smith de M est la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que la famille (e_i) est libre.

b. Montrer qu'on peut trouver des nombres rationnels λ, μ, ν non tous entiers tels que $\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3$ est à coefficients entiers. Que peut on dire des dénominateurs des formes irréductibles de λ, μ, ν ?

c. La famille (e_1, e_2, e_3) peut elle être une base du noyau d'une application linéaire $\mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{Z}$?

Peut elle être une base du noyau d'une application linéaire $\mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?
