L3 Algèbre effective — interrogation 1 — 7 ~~octobre~~ 2017
novembre

Durée : 1H. Tout document et appareil électronique interdit
Justifier chaque réponse

On rappelle qu'une fonction $f : E \mapsto F$ *est définie récursivement si on dispose d'une relation bien fondée* $<$ *sur* E *et d'une fonction* g *qui associe un élét de* F *à tout élt* x *de* E *et à toute famille* $(f_y)_{y<x}$ *d'éléments de* F *indexés par les* y *de* E *tels que* $y < x$, $<$ *et* g *étant tels qu'on a pour tout* x *de* E

$$f(x) = g(x, (f(y))_{y<x}) \ .$$

On dit que f *est définie récursivement relativement à* $<$ *et* g.

Q. Quand dit on qu'une relation sur un ensemble E est bien fondée ? Donner un exemple et un contre-exemple.

Ex. Voici ci-dessous la définition Python d'une fonction $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. La définition de f est elle récursive ?
Si oui, relativement à quelle relation $<$ et à quelle fonction g ? (Justifiez que $<$ est bien fondée.)
Que vaut $f(12, 30)$?

```python
def f(x,y):
    if abs(x)>abs(y):return(f(y,x))
    elif x==0:return(0,abs(y))
    else:return(f(x,abs(y)-abs(x)))
```

Ex. Soit $t \in \mathbb{Z}$ fixé. Montrer qu'il existe $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tels que

$$24x + 18y + 12z + 15t = 0 \quad (*)$$

si et seulement t est un multiple d'un entier d à déterminer.
Expliciter $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{Z}^3$ tel que (x_0, y_0, z_0, d) soit solution de $(*)$.
Montrer que $(x, y, z, t) \in \mathbb{Z}^4$ est solution de $(*)$ si et seulement si t est un multiple de d et

$$(x, y, z, t) = \frac{t}{d}(x_0, y_0, z_0, d) + (x_1, y_1, z_1, 0)$$

avec $(x_1, y_1, z_1, 0)$ solution de $(*)$. Montrer que cette écriture est unique.
Pouvez vous exhiber une base des solutions entières de $(*)$?

Ex. Expliciter (en justifiant) une matrice P inversible dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{Z})$ telle que $(24\ 18\ 24\ 15)P$ soit de la forme $(d\ 0\ 0\ 0)$. En déduire une base des solutions entières de l'équation $24x + 18y + 24z + 15t = 0$. Quel lien y a t-il avec les solutions de l'équation $(*)$ de l'exercice précédent ?