

L3 algèbre effective - Interrogation du 5 novembre 2019 2018

Durée 1H15. Tout document et appareil interdit.

Justifier chaque réponse

Ex. 1 Voici la définition Sagemath d'une fonction $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.

- Calculer $f(12, -6)$.
- Pour quel ordre bien fondé la définition de f est elle récursive ?

```
In [21]: def f(x,y):
         if x*y==0: return(-1)
         elif x%2==0: return(1+f(x/2,y))
         elif y%2==0: return(f(x,y/2)-1)
         else: return(0)
```

Ex.2. On considère les vecteurs $u = (3, 0, 3)$ et $v = (1, 6, 7)$.

- Donner un système d'équations du sous \mathbb{Q} -espace vectoriel de \mathbb{Q}^3 engendré par u et v .
- Donner un système d'équations du sous \mathbb{Z} -module de \mathbb{Z}^3 engendré par u et v .

Ex.3. Voici ci-dessous un script Sagemath et son résultat. Déduisez en une base et une équation de $\text{Im}(A)$ sur \mathbb{Z} .

```
In [22]: A=matrix(ZZ,[[3,1,1,-2],[1,8,1,0],[1,1,2,1]])
         D,P,Q=A.smith_form()
         show("A=",A)
         show("P =",P," Q =",Q)
         show("P^{-1} =",P^(-1)," Q^{-1} =",Q^(-1))
         show("P*A*Q =",P*A*Q)
```

Out[22]:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Out[22]:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -15 & 1 & -30 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Out[22]:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 30 & 15 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Out[22]:

$$P*A*Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 37 & 0 \end{pmatrix}$$