

1 a) Quels sont les diviseurs communs de 24 et 18 ?

Décrire un algorithme (Python ou langage naturel) exhibant les diviseurs communs positifs de deux nombres entiers a, b en n'utilisant que les opérations et relations élémentaires sur \mathbb{Z} $+, -, \times, <, =$

Pouvez vous proposer un algorithme récursif ?

b) Quel est le pgcd de 24, 18, 12, 21 ? Exhiber une relation de Bezout

c) L'équation $24x + 18y + 12z + 21t = 15$ a-t-elle une solution ? Si oui exhibez en une.

Peut-on trouver une solution vérifiant $x=t=0$?
 $x=y=0$?

2 a) Exhiber une matrice inversible $P \in GL_4(\mathbb{Z})$ $(a \ b \ c \ d) P = (a \ b \ c \ d-c)$ pour tous $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$(a \ b \ c \ d) P = (c \ a \ b \ d)$

b) Exhiber une suite de matrices $P_1, \dots, P_k \in GL_4(\mathbb{Z})$ $(24 \ 18 \ 12 \ 21) P_1 \dots P_k = (d \ 0 \ 0 \ 0)$ pour un entier d convenable

c) Exhiber une base de l'ensemble des quadruplets $(x, y, z, t) \in \mathbb{Z}^4$ $t_1 \ d_2 = 0$

En déduire une base du noyau de l'application $\mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y, z, t) \mapsto 24x + 18y + 12z + 21t$ à l'aide des matrices $P_1 \dots P_k$ du b)