

L3 Algèbre effective — session 2 — 25 juin 2019

Durée : 2H. Tout document et appareil électronique interdit

Justifier chaque réponse

Q.1 Qu'est ce qu'une relation bien fondée ?

Ex.2 On définit une fonction p par le script ci-dessous

```
In [7]: def p(l):
        if l==[]:return([[ ]])
        else:
            return(p(l[1:])+[[l[0]]+s for s in p(l[1:])])
        # l[n:] désigne [l[n],l[n+1],...]
```

a. Calculer $p([1, 2])$ et $p(p([]))$. Quel type d'objet prend p en argument ? Quel type d'objet rend p ?

b. Pour quelle relation bien fondée la définition de p est elle récursive ? Justifier.

c. Que calcule p ?

Ex.3 Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 11 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}.$$

a. Donner la liste (dans l'ordre) des opérations sur les lignes et les colonnes qui transforme A en sa forme de Smith sur \mathbb{Z} .

b. En déduire une base de l'image de A (vu comme \mathbb{Z} -module).

c. Donner un système d'équations linéaires (éventuellement modulaires) de l'image de A .

Ex.4 Voici ci-dessous un script Sagemath et son résultat. Déduisez en une base et une équation de $\text{Im}(A)$ sur \mathbb{Z} . Expliquez !

```
In [22]: A=matrix(ZZ,[[3,1,1,-2],[1,8,1,0],[1,1,2,1]])
        D,P,Q=A.smith_form()
        show("A=",A)
        show("P =",P," Q =",Q)
        show("P^{-1} =",P^(-1)," Q^{-1} =",Q^(-1))
        show("P*A*Q =",P*A*Q)
```

Out[22]:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Out[22]:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -15 & 1 & -30 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Out[22]:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 30 & 15 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Out[22]:

$$P*A*Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 37 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex.5 On considère le polynôme à coefficients entiers $P = X^3 + 2X^2 + X + 1$.

a. Le polynôme P vu dans $\mathbb{F}_3[X]$ est-il sans facteur carré ?

b. Montrer que la famille $(1, X, X^2)$ est une base du \mathbb{F}_3 -espace vectoriel $\mathbb{F}_3[X]/(P)$. Calculer la matrice de l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{F}_3[X]/(P) \rightarrow \mathbb{F}_3[X]/(P), y \mapsto y^3$ dans cette base.

b. Donner une base du noyau de $\varphi - \text{id}$. Que dit cette base sur l'irréductibilité de P ?

c. Quelles sont les racines de P dans \mathbb{F}_3 ?

Quelle est la nature de l'anneau $\mathbb{F}_3[X]/(P)$?