L3 Algèbre effective — session 2 — 13 juin 2017

Durée : 2H. Tout document et appareil électronique interdit
Justifier chaque réponse

Python

1.a. On définit la fonction zo par les instructions ci-dessous. Que vaut zo(12) ?
Pour quelles valeurs de d obtient on une réponse (autre chose qu'une erreur) en appelant zo(d) ?

```
def zo(d):
    return([x for x in [1..abs(d)] if d%x ==0])
```

1.b. On écrit les deux commandes suivantes. Que vaut v ? Comment s'interprète v comme fonction de u ?

```
u=[[0,1],[4,2,1],[],[9]]
v=[x for y in u for x in y]
```

2.a. Ecrire une fonction python (sans faire appelle à une telle fonction déjà programmée !) prenant comme argument deux entiers a,b et rendant, si a,b ne sont pas tous deux nuls, le plus grand entier (au sens de l'ordre habituel sur $\mathbb{Z}$) qui divise à la fois a et b.

2.b. Donner une preuve de ce que la fonction proposée en 2.a rende bien ce qu'on attend d'elle.

Algèbre linéaire et arithmétique sur les entiers

3.a. Quels sont les trois premiers éléments > 0 (au sens de l'ordre habituel sur $\mathbb{Z}$) du plus petit sous-groupe de $\mathbb{Z}$ contenant les quatre nombres 24, 18, 12, 15 ?

3.b. Pouvez vous exhiber une solution de l'équation $24x + 18y + 12z + 15t = 9$?
Existe t-il une solution vérifiant de plus $x = t = 0$?
Existe t-il une solution vérifiant de plus $x = t = 1$?

3.c. Exhiber une matrice P inversible dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ vérifiant $\begin{pmatrix} 24 & 18 & 12 & 15 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour un entier d convenable.

Exhiber une $\mathbb{Z}$-base du sous-groupe $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{Z}^4,\ dx = 0\}$ de $\mathbb{Z}^4$. En déduire une $\mathbb{Z}$-base du noyau de l'application $(x, y, z, t) \mapsto 24x + 18y + 12z + 15t$ puis un repère affine de l'ensemble des solutions de l'équation $24x + 18y + 12z + 15t = 9$.

4.a. Calculer la forme de Smith (avec les matrices de passage) de la matrice de $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

4.b. L'application $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$, $(x, y) \mapsto (4x + 3y, 3x + y)$ est elle injective ? surjective ?

5. Soient α, β deux entiers fixés et f l'application $\mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^2$, $(x, y, z) \mapsto (2x + \alpha y, 3x + \beta z)$.
L'application f peut elle être injective ?

A quelle condition sur α, β l'élément $(1,0)$ est il dans l'image de f ? A quelle condition l'application f est elle surjective ?

6. Peut on compléter la famille $\big((10,6,20,15)\big)$ en une base de $\mathbb{Z}^4$? Si oui exhiber une telle base et écrire les coordonnées du vecteur $(3,2,1,0)$ dans cette base.