**Université de Nice** **Calcul Intégral**
**L3** **1er semestre 2010/2011**

# Corrigé succinct du partiel du 28 octobre 2010

**Exercice 1.**
On a la suite

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\prod_{k=1}^{4n}(n+k)\right)^{\frac{1}{4n}}.$$

On considère $b_n = \ln(a_n) = \frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{4n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.
La fonction $\ln(x)$ est continue sur $[1,5]$ et donc Riemann intégrable.
La somme de Riemann $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{4n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$ tend vers $\int_1^5 \ln(t)dt$ quand $n$ tend vers l'infini.
Il vient que la limite de $b_n$ quand $n$ tend vers l'infini est $\frac{1}{4}\int_1^5 \ln(t)dt = \frac{1}{4}[t\ln(t)-t]_1^5 = \frac{5}{4}\ln(5)-1$.
Par continuité de $exp$ on trouve que $a_n$ converge vers $\frac{5^{\frac{5}{4}}}{e}$.

**Exercice 2.**
(i) On montre que l'intégrale de Riemann impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x}}dx$ converge absolument.
La valeur absolue de la fonction est majorée par $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ dont l'intégrable converge en zéro.
A l'infini $\frac{1}{x^2}$ tend vers zéro et la fonction $\sin(\frac{1}{x^2})$ est positive et équivalente à $\frac{1}{x^2}$. A l'infini la fonction $F(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x}}$ est donc positive et équivalente à $\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$ dont intégrable converge à l'infini.
Ceci montre que notre intégrale est absolument convergente.
(ii) Comme la fonction $F$ est continue sur $]0,+\infty[$, elle est Riemann-intégrable sur tout intervalle compact inclus dans $]0,+\infty[$. Comme l'intégrale de Riemann impropre de $F$ est absolument convergente sur $]0,+\infty[$, un résultat du cours (application du théorème de convergence dominée) montre que $F$ est Lebesgue-intégrable sur $]0,+\infty[$.
(iii) On note $F_n = \frac{\left(\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^n}{\sqrt{x}}$ et on constate que $|F_n| \leq |F|$. Il vient que l'intégrale de Riemann impropre $\int_0^{+\infty}\frac{\left(\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^n}{\sqrt{x}}dx$ est absolument convergente.
On applique la démonstration du point (ii) pour prouver que $F_n$ est Lebesgue-intégrable sur $]0,+\infty[$.
De plus, les fonctions $F_n$ sont dominées par la fonction intégrable : $|F|$.
On étudie la convergence simple de la suite $F_n$. Cette suite converge simplement vers 0 sur $]0,+\infty[\setminus\{\frac{1}{\sqrt{(2k+1)\frac{\pi}{2}}}, k\in\mathbb{N}\}$. La suite $F_n$ converge simplement vers la fonction nulle en dehors d'un ensemble dénombrable, donc négligeable. Par le théorème de convergence dominée $I_n$ converge vers 0.

**Exercice 3.**

On rappelle que $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (voir TD).
On a également démontré en TD que $\ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$ et donc, comme exp est strictement croissante, $(1+\frac{1}{n})^n < e$.
Avec le changement de variable $x^n = t$, on trouve

$$n\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(x^n)dx = \int_1^{(1+\frac{1}{n})^n} \frac{f(t)}{t} t^{\frac{1}{n}} dt = \int_1^e f_n(t)dt,$$

où on note $f_n(t) = \frac{f(t)}{t} t^{\frac{1}{n}} \chi_{[1,(1+\frac{1}{n})^n]}$.
Les fonctions $f_n$ sont continues sur $[1,(1+\frac{1}{n})^n]$ et donc Riemann intégrables. Par un résultat du cours, si on les prolonge par zéro elle restent Lebesgue-intégrables.
La limite simple de la suite des fonctions $f_n$ est $\frac{f(t)}{t}\chi_{[1,e]}$.
On vérifie que $|f_n(t)| \leq |f(t)|$ et la fonction $|f(t)|$ est continue sur $[1,e]$ et donc intégrable. On peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $f_n$ et conclure.