L3 Math. gr3 – Intégration — Université de Nice - Sophia Antipolis

Interrogation du 30 novembre 2010

durée 1H – Calculatrice et documents interdits

Nom : **Prénom :**

Question 1. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\mathrm{d}x$ est elle convergente ? L'application $x \mapsto \cos(x^2)$ est elle mesurable et intégrable sur $\mathbb{R}_+$?

Question 2. a) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$ l'application $x \mapsto \frac{\sin(x)\sin(xy)}{x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

b) On pose $F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)\sin(xy)}{x^2}\mathrm{d}x$. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

Question 3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ une fonction Lebesgue-intégrable. Pour $t \geq 0$ on pose $\varphi(t) = \int_0^1 \sqrt{t^2 + f(x)}\mathrm{d}x$.

a) Montrer que φ est bien défini, est continue et continument dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (on pourra au besoin découper l'intervalle $[0,1]$ en deux parties, l'une où $f \leq 1$ et l'autre où $f \geq 1$).

b) Montrer qu'on a $\varphi'(0) = \mu(\{x \in [0,1], f(x) = 0\})$ où μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. chgt de var. $u = x^2 \rightsquigarrow dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$ et $\int^b_0 \cos(x^2)\,dx = \int_0^{b^2} \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}\,du$ pour tout $b \geq 0$. Cette dernière intégrale est impropre en 0 mais convergente puisque la 1ère intégrale est bien définie

On fait une intégration par parties ~~en prenant~~ sur $[1, b^2]$ en prenant une primitive de cos et en dérivant $u \mapsto \frac{1}{2\sqrt{u}}$:

$\int_1^{b^2} \frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\,du = \left[\frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\right]_1^{b^2} + \int_1^{b^2} \frac{\sin(u)}{4u^{3/2}}\,du$ le 1er terme tend vers $-\frac{\sin(1)}{2\sqrt{1}}$ qd $b \to +\infty$. le second admet une limite finie qd $b \to +\infty$ (ie $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{4u^{3/2}}\,du$ est convergente) car $\left|\frac{\sin(u)}{4u^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{4u^{3/2}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{3/2}}$ converge

On a $\int_0^{b^2} \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}\,du = \int_0^1 \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}\,du + \int_1^{b^2} \frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\,du \xrightarrow[b \to +\infty]{} \int_0^1 \frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\,du + \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\,du \in \mathbb{R}$ ~~donc~~.

donc $\lim_{b \to +\infty} \int_0^b \cos(x^2)\,dx$ existe ie $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$ est convergente.

Rq Plus astucieux : on écrit $\cos(x^2) = [2x\cos(x^2)] \times \frac{1}{2x}$. On fait une intégration par partie sur $[1, +\infty[$ en prenant une primitive de $x \mapsto 2x\cos(x^2)$ et en dérivant $x \mapsto \frac{1}{2x}$. On obtient $\int_1^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \underbrace{\left[\frac{\sin(x^2)}{2x}\right]_1^{+\infty}}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{2x^2}\,dx}_{\text{convergente car dominée par } \frac{1}{2x^2}}$

donc $\int_1^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$ est convergente.

$x \mapsto \cos(x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc mesurable. Elle est intégrable si $\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)|\,dx < \infty$

Or $|\cos(x^2)| \geq \frac{1}{2}$ si $x^2 \in \left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$ donc en particulier si $x \in \left[\sqrt{k\pi - \frac{\pi}{3}}, \sqrt{k\pi + \frac{\pi}{3}}\right]$, $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

Avec la relation de Chasles et la positivité de l'intégrale on obtient $\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)|\,dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\sqrt{k\pi - \frac{\pi}{3}}}^{\sqrt{k\pi + \frac{\pi}{3}}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left((k\pi + \frac{\pi}{3})^{1/2} - (k\pi - \frac{\pi}{3})^{1/2} \right)$

Or pour a un réel fixé et k assez grand on a $(k\pi + a)^{1/2} = \sqrt{k\pi}\left(1 + \frac{a}{k\pi}\right)^{1/2} = \sqrt{k\pi}\left(1 + \frac{a}{2k\pi} + O_{k \to +\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)$

donc $\left(k\pi + \frac{\pi}{3}\right)^{1/2} - \left(k\pi - \frac{\pi}{3}\right)^{1/2} = \sqrt{k\pi}\left(\frac{\pi}{3k\pi} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3} \frac{1}{\sqrt{k}} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$

La série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge et celle de terme général $O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$ converge donc $\sum_{k=1}^{\infty} (k\pi + \frac{\pi}{3})^{1/2} - (k\pi - \frac{\pi}{3})^{1/2} = +\infty$ donc $x \mapsto \cos(x^2)$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$

2) a. $y \in \mathbb{R}$ fixé $\left|\dfrac{\sin(x)\sin(xy)}{x^2}\right| \underset{x\to 0}{\sim} y$ et $\left|\dfrac{\sin(x)\sin(xy)}{x^2}\right| = O_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ donc l'intégrale impropre

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)\sin(xy)}{x^2}\,dx$ est absolument convergente.

b. L'application $y \mapsto \dfrac{\sin(x)\sin(xy)}{x^2}$ est continue pour tout $x>0$. On a besoin d'une hypothèse de domination pour en déduire que F est continue. Sur $[1,+\infty[$ ~~sam~~ on a $\left|\dfrac{\sin(x)\sin(xy)}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$

Sur $]0,1]$ on écrit $|\sin(xy)| \leqslant |xy|$ ~~et~~ $|\sin(x)| \leqslant x$ donc $\left|\dfrac{\sin(x)\sin(x,y)}{x^2}\right| \leqslant |y|$. Si on astreint y à l'intervalle $[-a,a]$ pour un $a \in \mathbb{R}_+$ alors $x \mapsto \dfrac{\sin(x)\sin(xy)}{x^2}$ est dominée par la fonction constante égale à a qui est bien intégrable sur $[0,1]$. On en déduit que l'application $y \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)\sin(xy)}{x^2}\,dx$ est continue sur $[-a,a]$. a étant quelconque, elle est donc continue sur $\mathbb{R}_*$ entier. Par ailleurs $y \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)\sin(xy)}{x^2}\,dx$ est continue sur $\mathbb{R}_*$. En ajoutant ces deux fonctions on obtient que F est continue sur $\mathbb{R}$.

3) $f \in L^1([0,1])$; $\varphi(t) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{t^2+f(x)}\,dx$
$f \geqslant 0$

a. Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé l'application $x \mapsto t^2 + f(x)$ est mesurable (somme d'une fonction constante et d'une fonction mesurable).
L'application $y \mapsto \sqrt{y}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ ~~donc mesurable sur $\mathbb{R}$~~. La composée d'une fonction continue avec une fonction mesurable est mesurable donc $x \mapsto \sqrt{t^2+f(x)}$ est mesurable. Pour savoir qu'elle est intégrable il suffit de la majorer (elle est positive) par une fonction qu'on sait intégrable. Or là où $f \leqslant 1$ on a $\sqrt{t^2+f(x)} \leqslant \sqrt{t^2+1}$ qui est bien intégrable (par rapport à la variable x) sur $[0,1]$. Là où $f(x) \geqslant 1$ on a $\sqrt{t^2+f(x)} \leqslant t^2 + f(x)$ et $x \mapsto t^2$ tout comme f sont intégrables sur $[0,1]$
On a donc $\sqrt{t^2+f(x)} \leqslant \sqrt{t^2+1}\,\chi_{\{x\in[0,1],\,f(x)\leqslant 1\}}(x) + (t^2+f(x))\,\chi_{\{x\in[0,1],\,f(x)\geqslant 1\}}(x)$. Le second terme est intégrable donc $\varphi(t)$ est bien défini.

$t \mapsto \sqrt{t^2+f(x)}$ est continue ~~là où f est définie~~ dès que $f(x)$ est défini donc pour presque tout x. On a besoin d'une hypothèse de domination.
Soit $a>0$ fixé. La fonction $x \mapsto \sqrt{t^2+1}\,\chi_{\{x\in[0,1],\,f(x)\leqslant 1\}}(x)$ est dominée pour $t\in[0,a]$ par la constante $\sqrt{a^2+1}$ qui est intégrable sur $[0,1]$
La fonction $x \mapsto (t^2+f(x))\,\chi_{\{x\in[0,1],\,f(x)\geqslant 1\}}(x)$ est dominée pour $t\in[0,a]$ par $x \mapsto a^2 + f(x)$ qui est intégrable sur $[0,1]$
donc $x \mapsto \sqrt{t^2+f(x)}$ est dominée pour $t \in [0,a]$ par la ~~max~~ somme de ces deux fonctions, qui est bien intégrable sur $[0,1]$. On en déduit que φ est C^0 sur $[-a,a]$. a étant quelconque φ est continue sur $\mathbb{R}$.
Pour la dérivabilité on calcule $\dfrac{\partial}{\partial t}\sqrt{t^2+f(x)} = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+f(x)}} \leqslant 1$ or la constante 1 est intégrable sur $[0,1]$. On en déduit que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (dérivable à droite en 0) et $\forall t \geqslant 0$ $\varphi'(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t\,dx}{\sqrt{t^2+f(x)}}$. $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{t^2+f(x)}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $x \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{t^2+f(x)}}$ est dominée par $x \mapsto 1 \in L^1([0,1])$ donc φ' est continue.
A droite en 0 on a $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{t^2+f(x)}\right)_{(0^+)} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{t}{\sqrt{t^2+f(x)}} = 1$ si $f(x) = 0$ et $\varphi'_d(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial \sqrt{t^2+f(x)}}{\partial t}(0^+)\,dx = \int_0^1 \chi_{f^{-1}(0)} = \Gamma(f^{-1}(0))$
$= 0$ si $f(x) > 0$