Interrogation du 5 octobre 2010

durée 30mn – Calculatrice et documents interdits

**Nom :** **Prénom :**

**Question 1.** L'application $0 \mapsto 2$, $x \mapsto \frac{\pi}{x}\sin(\frac{x}{\pi})$ si $x \neq 0$ est elle Riemann-intégrable sur $[0,\pi]$ ?
Qu'en est il de l'application $0 \mapsto 2$, $x \mapsto \frac{\pi}{x}\cos(\frac{x}{\pi})$ si $x \neq 0$ sur $[0,\pi]$ ?
Justifiez.

**Question 2.** La suite $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2n+k)\big(\log(2n+k)-\log(n)\big)}$ admet elle une limite quand $n \to \infty$ ? Si oui que vaut cette limite ?

**Question 3.** La suite $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2}\arctan\big(\frac{k}{n}\big)$ admet elle une limite quand $n \to \infty$ ? Si oui que vaut cette limite ?

1. $f : \begin{array}{l} 0 \mapsto 2 \\ 0 \neq x \mapsto \frac{\pi}{x}\sin\left(\frac{x}{\pi}\right) \end{array}$ est $C^0$ sur $]0,\pi]$ et admet 1 comme limite à droite en 0 donc est $C^0$ par morceaux sur $[0,\pi]$ donc Riemann-intégrable sur $[0,\pi]$

$g : \begin{array}{l} 0 \mapsto 2 \\ 0 \neq x \mapsto \frac{\pi}{x}\cos\left(\frac{x}{\pi}\right) \end{array}$ $g(x) \sim_0 \frac{\pi}{x}$ donc $g$ n'est pas bornée sur $[0,\pi]$ donc n'est pas Riemann-intégrable

2. On réécrit $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2+\frac{k}{n}} \frac{1}{\log(2+\frac{k}{n})}$. On reconnaît une somme de Riemann pour $\int_0^1 \frac{dx}{(2+x)\log(2+x)}$

$x \mapsto \frac{1}{(2+x)\log(2+x)}$ est $C^0$ sur $[0,1]$ donc Riemann-intégrable donc $u_n \longrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{(2+x)\log(2+x)}$ qd $n \to \infty$

On sait calculer $\int_0^1 \frac{dx}{(2+x)\log(2+x)} = \Big[\log\big(\log(2+x)\big)\Big]_0^1 = \log(\log 3) - \log(\log 2)$

3. On reconnaît une somme de Riemann pour $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx$.

$x \mapsto x \operatorname{arctg} x$ est $C^0$ sur $[0,1]$ donc Riemann-intégrable donc $u_n \longrightarrow \int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx$ qd $n \to \infty$

On peut calculer $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx$ par une IPP : $u'(x) = x \rightsquigarrow u(x) = \frac{x^2}{2}$
$v(x) = \operatorname{arctg} x \rightsquigarrow v'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx = \Big[\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1\Big(1-\frac{1}{1+x^2}\Big)dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\big[\operatorname{arctg}\big]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$