LICENCE DE MATHÉMATIQUES 2010-11
ANALYSE 1
UNIVERSITE DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS

FEUILLE No 1

Exercice 1 *Traduire à l'aide de quantificateurs :*

- *"il existe un nombre entier tel que si on multiplie ce nombre par* 2*, on obtient* 4*."*
- *'il existe un nombre entier impair dont le carré est pair"*
- *"tout nombre entier impair a son carré impair".*
- *"la somme de deux nombres entiers pairs est un nombre pair".*

Exercice 2 *Soit* $I \subset \mathbb{R}$*. Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une application. On dit que* f *est croissante si :*

"étant donnés deux élément quelconques de $\mathbb{R}$*, leurs images par* f *sont rangées dans le même ordre."*

On dit que f *est décroissante si : "étant donnés deux élément quelconques de* $\mathbb{R}$*, leurs images par* f *sont rangées dans l'ordre inverse."*

Traduire les définitions précédentes avec des quantificateurs.

Exercice 3 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, l'application définie par* $f(x) = 2x + 1$*. Montrer que* f *est croissante.*

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, l'application définie par* $f(x) = x^2$*. Cette application est elle croissante ? Que dire de* $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *définie par* $h(x) = x^2$ *?*

Exercice 4 *Soit* $f : X \to Y$ *une application. Rappeler la définition de "*f *est injective". Montrer que cette définition est équivalente à*

$$\forall x, x' \in X,\ (f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x').$$

Exercice 5 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = 8x - 3$*. Montrer que* f *est injective.*

Exercice 6 *Soient* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *deux fonctions injectives. Montrer que* $f \circ g$ *est injective.*

Exercice 7 *Soient* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x^2$ *et* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *définie par* $g(x) = x^2$*. Montrer que* f *n'est pas surjective. Montrer que* g *est surjective.*

Exercice 8 *Soient* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = 2x$ *et* $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *définie par* $g(x) = 2x$*. Montrer que* f *est surjective et que* g *ne l'est pas.*

Exercice 9 *Démontrer que* $\sqrt{2}$ *n'est pas rationnel.* On pourra procéder par l'absurde et supposer qu'il existe deux entiers a et b premiers entre eux tels que $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$.

Exercice 10 *Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :*

1. *Soit* S_n *la somme des* n *premiers nombres impairs ; c.a.d.* $S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$*. Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $S_n = n^2$*.*

2. *Démontrer que*
$$\forall n \in \mathbb{N},\, \forall x \in]-1,+\infty[,\ (1+x)^n \geq 1+nx.$$

Exercice 11 *Dans chacun des cas suivants, dites si l''ensemble considéré est majoré, minoré ? Lorsque c'est possible, donnez la borne supérieure et la borne inférieure et déterminez si l'ensemble possède une maximum, un minimum.*

$$E_1 =]0,1],\ E_2 = \mathbb{N},\ E_3 = [0,+\infty[, E_4 = \{x \in \mathbb{Q},\ x^2 < 2\}.$$

Exercice 12 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x^2 + 1$. *Déterminer les ensembles suivants :*

$$f([0,2]),\ f(\mathbb{R}),\ f^{-1}([1,2]),\ f^{-1}([0,1[).$$