Université de Nice **Calcul Intégral**
L3 **1er semestre 2010/2011**

Feuille d'exercices 2

Exercice 1.
Déterminer la limite, quand n tend vers l'infini, des expressions suivantes :
$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tan\frac{k}{n}$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$ et $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\ln(1+\frac{k}{n})$.

Exercice 2.
Déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$, des expressions suivantes :
$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{n+k}{n^3}}$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\cos\frac{k}{n}$.

Exercice 3.
Déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$, des expressions suivantes :
$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n+k)(\ln(2n+k)-\ln(n))}$.

Exercice 4.
Déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$, des expressions suivantes :
$S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2-k^2}$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} Arctan \frac{k}{n}$.

Exercice 5.
Soit $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions Riemann-intégrables. Déterminer la limite, lorsque n tend vers l'infini, de

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

en observant que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \left| g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

peut être interprétée comme la différence de deux sommes de Riemann associées à la fonction g.

Exercice 6.
Déterminer les limites, quand $n \to +\infty$, des expressions suivantes

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n} \quad , \quad \sin(\frac{\pi}{n})\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\cos(\frac{k\pi}{2n})} \quad , \quad \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} E(\sqrt{k}) \ ,$$

oú $E(x)$ désigne la partie entière du réel x.

Exercice 7.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $|\alpha| \neq 1$. Montrer que

$$\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^2-1} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - 2\alpha\cos(\tfrac{k\pi}{n}) + \alpha^2\right).$$

En déduire la valeur de

$$I = \int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\ \mathrm{d}x.$$

Exercice 8.
Calculer les integrales de Wallis : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.