Université de Nice **Calcul Intégral**
L3 **1er semestre 2010/2011**

Feuille d'exercices 3

Exercice 1.
Déterminer la limite, quand n tend vers l'infini, des expressions suivantes :
$S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(n-k)}$, $T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2(\frac{k}{n})\sin^3(\frac{k}{n})$.

Exercice 2.
Soit s un nombre réel.

(i) L'intégrale impropre $\int_0^1 t^s dt$ est convergente en 0 pour $s > -1$ et divergente pour $s \leq -1$.
(ii) L'intégrale impropre $\int_1^\infty t^s dt$ est convergente pour $s < -1$ et divergente pour $s \geq -1$.
(iii) En déduire que l'intégrale $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$ est convergente. Que peut-on dire de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$

Exercice 3.
(i) Montrer que l'intégrale $\int_\pi^\infty \frac{\cos t}{t^2} dt$ est convergente.

(ii) Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente, mais pas absolument convergente.

Exercice 4.
(i) Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx$ converge.

(ii) Déterminer une primitive de $x^n e^{-x}$.

(iii) Calculer $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx$.

Exercice 5.
(i) Montrer que pour tout $x > 0$ l'intégrale $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$.

(ii) Vérifier que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(iii) Que vaut $\Gamma(n+1)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6.
Soient f, g deux fonctions continues définies sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(i) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Démontrer que la fonction $(f + \lambda g)^2$ est intégrable et exprimer son intégrale en fonction des intégrales de f^2, fg et g^2.

(ii) En observant que l'intégrale de $(f + \lambda g)^2$ est positive ou nulle pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq (\int_a^b f^2(x)dx)(\int_a^b g^2(x)dx).$$

(iii) Démontrer que l'égalité a lieu si et seulement si f et g sont proportionnelles.