Université de Nice **Calcul Intégral**
L3 **1er semestre 2010/2011**

Feuille d'exercices 4

Exercice 1.
On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \int_0^1 [\cos(\frac{1}{x})]^n dx$.
1) Déterminer la limite (au sens de la convergence simple) de la suite de fonctions (f_n) définie, pour $x \neq 0$, par $f_n(x) = [\cos(\frac{1}{x})]^n$.
2) Déterminer la limite de la suite I_n.

Exercice 2.
Montrer que les intégrales suivantes sont bien définies et calculer la limite de la suite $I_n = \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 3.
Soit $f : [0,1] \to [0,+\infty[$ une fonction continue qui s'annule sur un ensemble négligeable. On définit une suite de fonctions $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $g_n(x) = \frac{1}{1+nf(x)}$. Justifier que les fonctions g_n sont intégrables et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4.
1) Pour quelles valeurs du réel α l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha dx$ est-elle convergente ?
On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \int_0^n \frac{(1-\frac{x}{n})^n}{\sqrt{x}} dx$.
Justifier l'existence de I_n, puis étudier la limite de I_n quand n tend vers l'infini.
2) Etudier les limites des intégrales suivantes quand n tend vers l'infini :
a) $\int_0^1 \frac{(1+nx)}{(1+x)^n} dx$;
b) $\int_0^n (1-\frac{x}{n})^n \cos(x) dx$;
c) $\int_0^\infty n \frac{\sin(\frac{x}{n})}{x(1+x^2)} dx$;
d) $\int_0^\infty \frac{\sin(\pi x)}{1+x^n} dx$;
e) $\int_0^1 \frac{(\sin(\frac{1}{x}))^n}{\sqrt{x}} dx$;
f) $\int_0^n (1-\frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}} dx$.

Exercice 5.
On considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$.
1) Déterminer la limite de I_n quand n tend vers l'infini.
2) On pose $u_n = 1 - I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$.
a) Montrer que la suite des fonctions $f_n(x) = \frac{nx^n}{1+x^n}$ tend vers 0 simplement presque partout.
b) Montrer la formule $nu_n = \ln(2) - \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$ et en déduire la limite de nu_n quand n tend vers l'infini. Ce résultat est-il compatible avec le point précédent ? Donner un

développement asymptotique de I_n de la forme $I_n = \alpha + \frac{\beta}{n} + o(\frac{1}{n})$ avec α et β des nombres réels.

Exercice 6.
Développer $\frac{1}{1+t}$ comme somme d'une série en t qui converge pour $0 \leq t < 1$. En intégrant la fonction $\frac{1}{t+1}$ sur l'intervalle $[0, 1]$, de deux manières différentes, déduisez que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.

Exercice 7.
En calculant de deux façons la somme : $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^1 x^{2n}(1-x)dx$, déterminer la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

Exercice 8.
Calculer $I_n = \int_0^1 x^{2n} \ln(x)\, \mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2}\, \mathrm{d}x$$

sous forme d'une série. Préciser la valeur de I sachant que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 9.
Pour $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-\alpha t}\, \mathrm{d}t\,.$$

Justifier que pour $t \geq 0$ fixé, la suite $\big((1+\frac{t}{n})^n\big)$ est monotone. Utiliser cette propriété pour indiquer selon les valeurs de α le comportement de $I_n(\alpha)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Préciser la valeur de la limite de $I_n(\alpha)$ lorsqu'elle existe.

Exercice 10.
Soit $\alpha > 1$ un réel donné. On pose

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx$$

et on définit une fonction $h_\alpha : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$h_\alpha(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} \qquad \text{pour tout } x > 0.$$

Justifier que la fonction h_α est intégrable sur $[0, +\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} h_\alpha(x)\, \mathrm{d}x = \Gamma(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}\,.$$