Université Nice-Sophia Antipolis **Calcul Intégral**
L3 **1er semestre 2010/2011**

Feuille d'exercices 5

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{f(x)}{1+|f(x)|}$ est intégrable.

Exercice 2. Soit $f_n : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ pour $n \geq 1$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives. Montrer que si f_1 est intégrable, alors on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} \big(\lim_{n\to+\infty} f_n \big) \,\mathrm{d}\mu.$$

Est-ce encore vrai sans l'hypothése que f_1 est intégrable ?

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On désigne par μ la mesure de Lebesgue.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $E_n = \{x \in X \ ; \ |f(x)| \geq n\}$.
1) Montrer que la mesure de E_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
2) Montrer que $\int_{E_n} |f| \,\mathrm{d}\mu$ tend vers 0 et que $n\,\mu(E_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ une fonction intégrable positive. On note $A = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ f(x) < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ f(x) = 1\}$ et $C = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ f(x) > 1\}$. Etudier séparément les limites des suites $\big(\int_A f(x)^n \,\mathrm{d}x \big)$, $\big(\int_B f(x)^n \,\mathrm{d}x \big)$ et $\big(\int_C f(x)^n \,\mathrm{d}x \big)$ lorsque n tend vers l'infini. A quelle condition sur f la suite $\big(\int_{\mathbb{R}} f(x)^n \,\mathrm{d}x \big)$ est-elle convergente dans $\mathbb{R}$?

Exercice 5. Soit x un nombre réel ≥ 0.
1) Montrer que la fonction $t \mapsto f(x,t) := \dfrac{e^{-tx}}{(1+t)\sqrt{t}}$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, +\infty[$.
On pose, pour $x \geq 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{(1+t)\sqrt{t}}\, dt\cdot$
2) a) Montrer que la fonction F est continue sur $[0, +\infty[$. Calculer $F(0)$ et préciser la limite de F en $+\infty$.
b) Montrer que la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.
c) Montrer que, sur $]0, +\infty[$, F vérifie l'equation différentielle :

$$F'(x) - F(x) = -\frac{A}{\sqrt{x}},$$

où la constante A est définie par $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du\cdot$

3) On pose, pour $x \geq 0$, $G(x) = Ae^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$. Montrer qu'on a $F(x) = G(x)$ pour tout $x \geq 0$ (on utilisera 2.c et on montrera que G est bornée quand x tend vers $+\infty$). En déduire la valeur de A.
4) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) \mathrm{e}^{-t^2/2} \,\mathrm{d}t\,.$$

a) Montrer que f est bien définie pour tout x dans $\mathbb{R}$ et qu'elle est partout dérivable.
b) En faisant une intégration par parties, montrer que f vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -xf(x)\,.$$

Déterminer f en résolvant cette équation différentielle sachant que $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-u^2} \,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$.

Exercice 7.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Pour $t \geq 0$, on pose

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{\sqrt{1 + tf(x)^2}} \,\mathrm{d}x\,.$$

a) Montrer que F est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.
b) Etudier le comportement de $F(t)$ lorsque t tend vers l'infini.
c) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
d) Montrer que si f^3 est intégrable, alors la dérivée à droite $F'_d(0)$ existe.

Exercice 8. Pour $t > 0$ et $x > 0$, on pose

$$f(x,t) = \frac{\sin x}{x} \mathrm{e}^{-tx}\,.$$

a) Montrer que la fonction

$$F(t) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\, dx$$

est bien définie pour tout $t > 0$. Montrer qu'elle est dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer sa dérivée sous forme d'une fraction rationnelle en t.
b) Calculer la limite de $F(n)$ lorsque $n \to +\infty$. En déduire la valeur de la fonction F.
c) Montrer que la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x$ est convergente et que

$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\,.$$

On note $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ (intégrale de Riemann généralisée) cette valeur.
d) Par contre, montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ n'est pas Lebesgue intégrable sur $[0, +\infty[$.
e) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$F(\tfrac{1}{n}) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} \left[\mathrm{e}^{-x/n} \left(1 + \frac{x}{n}\right) - 1\right] dx\,.$$

En déduire la valeur de l'intégrale de Riemann généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.