Université Nice-Sophia Antipolis | **Calcul Intégral**
L3 | **1er semestre 2010/2011**

Feuille d'exercices 6

Exercice 1.
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction mesurable. Soit λ un nombre réel ≥ 0. Lorsque la fonction g_λ définie par $g_\lambda(t) = f(t)e^{-\lambda t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ on définit :

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-\lambda t}\, dt.$$

1) Montrer que g_λ est intégrable dans les cas suivants :
- f est intégrable et λ quelconque,
- f est bornée et $\lambda > 0$,
- $|f(t)| \leq t^\alpha$ avec $\alpha > -1$ et $\lambda > 0$,
- $|f(t)| \leq e^{at}$ et $\lambda > a$.

2) Calculer $F(\lambda)$ dans les cas suivants (dans chaque cas on précisera le domaine de définition de F) : f est une constante, $f(t) = e^{kt}$, $f(t) = \sin t$, $f(t) = t^n$, $n \in \mathbf{N}^*$, $f(t) = 1/\sqrt{t}$ (on rappelle la formule $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$), f est la fonction qui vaut t sur $[0, a]$ et b sur $]a, +\infty[$.

3) On suppose que g_λ est intégrable pour $\lambda = \lambda_0$. Montrer que g_λ est intégrable pour $\lambda \geq \lambda_0$ et déterminer la limite de $F(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

4) On suppose f intégrable sur $[0, +\infty[$. Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$.

5) On suppose f bornée. Montrer que F est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et calculer $F^{(n)}$.

Exercice 2.
1) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction intégrable et soit $A = \{x \in \mathbf{R}, |f(x)| < 1\}$. Montrer que A est mesurable et que la suite $\int_A |f(x)|^n dx$ converge vers 0.

2) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction mesurable, telle que la fonction $x \to f(x)^n$ soit intégrable pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et que la suite des intégrales $I_n = \int_{\mathbf{R}} |f(x)|^n dx$ soit bornée.

a) On pose, pour $p \in \mathbf{N}^*$, $B_p = \{x \in \mathbf{R}, |f(x)| \geq 1 + \frac{1}{p}\}$. Montrer que B_p est de mesure nulle.

b) En déduire que l'ensemble $B = \{x \in \mathbf{R}, |f(x)| > 1\}$ est de mesure nulle.

c) Inversement, montrer que si f est intégrable et B de mesure nulle, la suite I_n est bornée.

Exercice 3.
Posons, pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = e^{-x^2} \sin(2xy)$.

a) Montrer que, pour tout $y \in \mathbf{R}$, la fonction $f(x, y)$ est intégrable par rapport à x sur $[0, \infty[$.

b) Montre que la fonction $F(y) = \int_0^{+\infty} f(x, y)dx$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et donner une expression de sa dérivée.

c) Démontrer que l'on a $F'(y) + 2yF(y) = 1$. En déduire que

$$F(y) = e^{-y^2} \int_0^y e^{t^2} dt.$$

Exercice 4. Soit X un intervalle borné et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.
a) Montrer que la formule

$$F(t) = \int_X \arctan(tf(x))\, dx, \quad t \in \mathbf{R},$$

définit une fonction continue $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, et montrer que la limite $\lim_{t \to +\infty} F(t)$ existe.

b) Montrer que F est continuement dérivable sur $\mathbf{R}^*$.

Exercice 5. Soit $f : [0, 1] \to \mathbf{R}^+$ une fonction Lebesgue intégrable. Pour $t \geq 0$, on pose

$$\varphi(t) = \int_0^1 \sqrt{t^2 + f(x)} dx\,.$$

a) Montrer que φ est finie, et de classe C^1 sur $\mathbf{R}^+$.

b) Montrer que

$$\varphi'(0) = \lambda(f^{-1}(0))\,,$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.