Université Nice-Sophia Antipolis — **Calcul Intégral**
L3 — **1er semestre 2010/2011**

Feuille d'exercices 7

Exercice 1. Montrer que la fonction $(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mapsto f(x,y) = ye^{-(1+x^2)y^2}$ est intégrable sur $(\mathbb{R}^+)^2$. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2$.

Exercice 2. Soient $\beta > \alpha > 0$. On considère la fonction $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad g(y) = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha y^2} - \mathrm{e}^{-\beta y^2}}{y} \quad \text{si } y > 0 .$$

a) Montrer que g est intégrable sur $[0,+\infty[$.
b) Vérifier que l'on a $g(y) = \int_\alpha^\beta y\mathrm{e}^{-ty^2}\mathrm{d}t$.
c) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} g(y)\mathrm{d}y$.

Exercice 3. Etudier l'intégrabilité de
$f(x,y) = \dfrac{1\!\!1_D(x,y)}{x^2+y^2}$ où $D =]0,1[^2$ ou bien $D = [1,+\infty[^2$.

Exercice 4. Soit $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x^2+y^2 \leq 1\}$.
1) Justifier que la fonction indicatrice de D est intégrable.
2) Calculer $\displaystyle\int_D xy\sqrt{x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Exercice 5. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables. Montrer que la fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = f(x)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et que l'on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_{\mathbb{R}} g(t)\,\mathrm{d}t\right) .$$

Exercice 6. Soit $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^{1/2}+y^{1/2}+z^{1/2} \leq 1\}$. Vérifier que la fonction indicatrice de D est intégrable. Calculer le volume de D en faisant le changement de variables $x = X^2$, $y = Y^2$, $z = Z^2$.

Exercice 7. Soit $D = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ x+y+z < 1\,\}$ et soit $g : D \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y,z) = \frac{z^3}{(y+z)(x+y+z)}$$

Montrer que g est intégrable et calculer son intégrale en utilisant le changement de variables $(x,y,z) \to (u,v,w)$ défini par les relations $u = x+y+z$, $uv = y+z$, $uvw = z$

(on vérifiera que l'ensemble des (x, y, z) tels que $x > 0, y > 0, z > 0$ et $x + y + z < 1$ correspond dans ce changement de variables à l'ensemble des $(u, v, w) \in]0, 1[^3)$.

Exercice 8. Soit $D = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \; ; \; xy \leq 1, \; |y - x| \leq \frac{3}{2}\}$. Représenter graphiquement l'ensemble D en faisant apparaître notamment les points $(\frac{1}{2}, 2)$ et $(2, \frac{1}{2})$. Utiliser un changement de variables défini par $u = y - x$, $v = xy$ pour calculer l'intégrale

$$\int_D \frac{(x + y)\mathrm{e}^{y-x}}{1 + xy} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \, .$$

Exercice 9. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x > 0, \; y > 0, \; \frac{1}{2} < x + y < 1\}$. Utiliser un changement de variables défini par $u = x + y$, $v = x - y$ pour calculer l'intégrale

$$\int_D \exp\left(\frac{x - y}{x + y}\right) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \, .$$

Exercice 10. Discuter selon les valeurs du paramétre réel α l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction $f_\alpha : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^\alpha}$ et calculer $\int_{\mathbb{R}^2} f_\alpha(x, y) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Exercice 11. Soit D l'intersection de la boule unité de $\mathbb{R}^3$ et du cylindre dont l'axe est parallèle à Oz et dont l'intersection avec le plan xOy est le disque Δ de rayon $\frac{1}{2}$ centré au point $(\frac{1}{2}, 0, 0)$, c'est-á-dire $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \; x^2 + y^2 \leq x\}$.
Calculer le volume de D.
Indication : on se ramenera à une intégrale sur Δ que l'on évaluera en utilisant les coordonnées polaires.