**Université de Nice** | **Calcul Intégral**
**L3** | **1er semestre 2010/2011**

# Partiel du 28 octobre 2010

**Exercice 1.**
Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de la suite suivante :

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\prod_{k=1}^{4n}(n+k)\right)^{\frac{1}{4n}}.$$

**Exercice 2.**
(i) Montrer que l'intégrale de Riemann impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x}}dx$ converge.

(ii) La fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x}}$, pour tout $x > 0$, est-elle intégrable au sens de Lebesgue sur l'intervalle $[0, +\infty[$ ?

(iii) Montrer que les intégrales suivantes sont bien définies et déterminer la limite de la suite définie par $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\left(\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^n}{\sqrt{x}}dx$, quel que soit $n \geq 1$.

**Exercice 3.**

(i) Prouver l'inégalité $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e$, quel que soit l'entier $n \geq 1$.

(ii) Soit $f : [1, e] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(x^n)dx = \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx.$$

Indication : on pourra utiliser le changement de variable $x^n = t$.