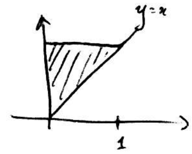
L3 math 2006 Probabilité et statistiques

Corrigé du partiel

1.1 $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq y \leq 1 \}$



$f_{(X,Y)}(x,y) = c\,x\,y\,\mathbb{1}_D(x,y)$ On doit avoir $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)} = 1$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^y c\,x\,y\,dx \right) dy = \int_0^1 c\frac{y^3}{2}\,dy = \frac{c}{8} \quad \text{donc } c = 8$$

1.2 On calcule les densités marginales de X et de Y

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy = \int_x^1 8xy\,dy = 4x(1-x^2) \quad \text{si } x \in [0,1]$$
$$= 0 \quad \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx = \int_0^y 8xy\,dx = 4y^3 \quad \text{si } y \in [0,1]$$
$$= 0 \quad \text{si } y \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$$

Si X et Y étaient indépendantes on aurait $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$ ce qui n'est manifestement pas le cas.

2.1 $E(X) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ E(X_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\Sigma_X = \left(Cov(X_i, X_j) \right)_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}} = \begin{pmatrix} Var(X_1) & & 0 \\ & Var(X_2) & \\ 0 & & Var(X_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix}$

Pour $t \in \mathbb{R}^3$ qu'on écrit comme une matrice 3×1 on a $\phi_X(t) = \exp(i \langle t | E(X) \rangle) \exp\left(-\frac{\langle t | \Sigma_X t \rangle}{2}\right) = \exp(i(t_1+t_2+t_3)) \exp\left(-\frac{t_1^2+2t_2^2+3t_3^2}{2}\right)$

2.2 $Y = AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ alors $\Sigma_Y = E(Y\,{}^tY) = E(A X\,{}^tX\,{}^tA) = A \Sigma_X {}^tA$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 11 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2.3 pour $t \in \mathbb{R}^3$ qu'on écrit comme un vecteur colonne on a $\phi_Y(t) = \exp(i \langle t | E(Y) \rangle) \exp\left(-\frac{\langle t | \Sigma_Y t \rangle}{2}\right)$

On a besoin de $E(Y)$: $E(AX) = A\,E(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc si $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$, $\langle t | E(Y) \rangle = t_1 + 3t_2 + 2t_3$

$\Sigma_Y t = \begin{pmatrix} 2t_1 + 4t_2 \\ 4t_1 + 11t_2 + 3t_3 \\ 3t_2 + 4t_3 \end{pmatrix}$ donc $\langle t | \Sigma_Y t \rangle = 2t_1^2 + 4t_1t_2 + 4t_2t_1 + 11t_2^2 + 3t_2t_3 + 3t_3t_2 + 4t_3^2 = 2t_1^2 + 11t_2^2 + 4t_3^2 + 8t_1t_2 + 6t_2t_3$

On obtient $\phi_Y(t) = e^{i(t_1+3t_2+2t_3)}\, e^{-\frac{2t_1^2+11t_2^2+4t_3^2+8t_1t_2+6t_2t_3}{2}}$

2.4 Première méthode : On calcule pour $t \in \mathbb{R}$ $\phi_{Y_1+Y_2+Y_3}(t) := E(\exp(it(Y_1+Y_2+Y_3))) = E\left(\exp i \left\langle \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \middle| Y \right\rangle\right) = \phi_Y(t,t,t) = e^{i6t} e^{-31\frac{t^2}{2}}$

d'après 2.3. On reconnaît la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(6, 31)$

(2.4) Deuxième méthode : On a $Y_1 = X_2$, $Y_2 = 2X_2 + X_3$, $Y_3 = X_1 + X_2$ puisque $Y = AX$

donc $Y_1 + Y_2 + Y_3 = X_1 + 3X_2 + 2X_3$

$X_1, 3X_2, 2X_3$ sont des v.a. indépendantes de loi normale donc leur somme suit une loi normale. Il reste à en déterminer l'espérance et la variance.

On a $E(X_1 + 3X_2 + 2X_3) = E(X_1) + 3E(X_2) + 2E(X_3) = 1+3+2 = 6$

$Var(X_1 + 3X_2 + 2X_3) = Var(X_1) + Var(3X_2) + Var(2X_3)$ puisque $X_1, 3X_2$ et $2X_3$ sont indépendantes

$= Var(X_1) + 9\, Var(X_2) + 4\, Var(X_3) = 1 + 9\times 2 + 4\times 3 = 31$

Conclusion $Y_1 + Y_2 + Y_3 \sim \mathcal{N}(6, 31)$

3. $f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2} \exp\left(-x - \frac{|y|}{x}\right) 1_{\{x>0\}}$

3.1. $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy = 0$ si $x \leq 0$

$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \exp\left(-x - \frac{|y|}{x}\right) dy$ si $x > 0$ ce qu'on suppose ci-dessous

$= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-x} e^{-\frac{y}{x}}\, dy = \left[-x e^{-x} e^{-\frac{y}{x}}\right]_0^{+\infty} = x e^{-x}$

3.2 $P(X=0) = \int_0^0 f_X(x)\,dx = 0$ donc $X \neq 0$ presque sûrement (en fait $X > 0$ presque sûrement)

Donc $Z = \frac{Y}{X}$ est bien défini sauf sur une partie de Ω de mesure nulle. On cherche la densité du couple (X, Z)

Pour ϕ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ absolument intégrable on a $E(\phi(X,Z)) = E(\phi(X, \frac{Y}{X})) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x, \frac{y}{x}) f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$

$= \int_{]0,+\infty[\times\mathbb{R}} \phi(x, \frac{y}{x}) f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$ car $f_{(X,Y)}(x,y) = 0$ si $x \leq 0$

On fait le chang^t de variable $(x, \frac{y}{x}) = (x, z)$

l'application $(x,z) \mapsto (x, zx)$ est un C^1 difféomorphisme $]0,+\infty[\times\mathbb{R} \to]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ de matrice jacobienne $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & x \end{pmatrix}$ en (x,z)

On obtient $E(\phi(X,Z)) = \int_{]0,+\infty[\times\mathbb{R}} \phi(x,z) f_{(X,Y)}(x, zx)\, x\, dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x,z) f_{(X,Y)}(x,zx)\, x\, dx\,dy$ puisque $f_{(X,Y)}(x,zx) = 0$ si $x \leq 0$. On en déduit que le couple (X,Z) admet $(x,z) \mapsto f_{(X,Y)}(x,zx)\,x$ comme densité

$f_{(X,Y)}(x,zx)\,x = \frac{x}{2}\exp(-x - |z|)$ si $x > 0$

$= 0$ si $x \leq 0$

donc $f_{(X,Z)}(x,z) = f_X(x)\, g(z)$ avec $g(z) = \frac{e^{-|z|}}{2}$ $\forall z \in \mathbb{R}$

On en déduit que la densité marginale de Z est g puis que X et Z sont indépendantes.

3.3 $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X, XZ) = E((X-E(X))(XZ-E(XZ)))$

On a $E(XZ) = E(X)E(Z)$ par indépendance. $E(Z)=0$ car $f_Z : z \mapsto \frac{e^{-|z|}}{2}$ est paire. Donc $E(XZ)=0$

On obtient $\mathrm{Cov}(X,Y) = E((X-E(X))XZ) = E((X-E(X))X)\,E(Z)$ par indépendance

$= 0$ puisque $E(Z)=0$

3.4 Y a une densité puisque (X,Y) en a une. Si X et Y étaient indépendantes on aurait $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$

donc pour $x>0$ $\frac{1}{2}\exp\left(-x-\frac{|y|}{x}\right) = x\exp(-x)\,f_Y(y)$

soit $\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{|y|}{x}\right) = x\,f_Y(y)$

le terme de droite est linéaire en x, le terme de gauche ne l'est pas (par exemple $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{|y|}{x}\right) = \frac{1}{2}$)

Contradiction.

Donc X et Y ne sont pas indépendantes.