L3 proba 2005-06 Corrigé de la feuille 3

I $X = (X_1, \dots, X_d)$ variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Si $E(X)=0$, la matrice $E(X\,{}^tX)$ est la matrice de covariance de X (pour X quelconque on a $\Sigma_X = E\big((X-E(X))\,{}^t(X-E(X))\big)$ où X est noté en colonne.

1) Soit $A \in M_{m,d}(\mathbb{R})$ et $b \in M_{m,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^m$. On a $\phi_{AX+b}(t) = E(\exp(i\,{}^t(AX+b)t)) = E(\exp(i\,{}^tb.t)\exp(i\,{}^tX\,{}^tAt))$ $\quad(\langle t, AX+b\rangle = {}^t(AX+b)t)$

$$= e^{i\,{}^tb\,t}\,E(\exp(i\,{}^tX\,({}^tAt)))$$
$$= e^{i\,{}^tb.t}\,\phi_X({}^tA\,t)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^m$ qu'on représente comme un vecteur colonne.

2) Supposons $E(X)=0$ (sinon on remplace X par $X-E(X)$). Soit $Y = AX$ alors $E(Y) = E(AX) = AE(X) = 0$. La matrice de covariance de Y est donc donnée par $E(Y\,{}^tY) = E(AX\,{}^tX\,{}^tA) = A\,E(X\,{}^tX)\,{}^tA = A\,\Sigma_X\,{}^tA$

Si $m=d$ et A est orthogonale (ie ${}^tA\,A = I_d$) On a $\sum_{i=1}^m Y_i^2 = {}^tY\,Y = {}^tX\,{}^tA\,A\,X = {}^tX\,X = \sum_{i=1}^d X_i^2$

Rq On peut avoir ${}^tA\,A = Id$ avec $d<m$. Notre calcul reste valide.

Si $\Sigma_X = I_d = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ alors $\Sigma_Y = A\,\Sigma_X\,{}^tA = A\,{}^tA$. Si $m=d$ alors ${}^tA\,A = I_m \Rightarrow A\,{}^tA = I_m$ et on conclut $\Sigma_Y = I_m$

Si $d<m$ on ne peut conclure.

II $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & 4 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. La loi $\mathcal{N}((1,0,-1), A)$ est bien définie si A est symétrique, ce qui est bien le cas, et positive. Pour vérifier que A est positive on calcule les valeurs propres de A et on vérifie qu'elles sont toutes positives.

On a $\det(A - x I_3) = -(x-3)^2(x-12)$

Rq On observe que $A-3I$ est de rang 1 donc 3 est valeur propre de multiplicité 2. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est la troisième valeur propre on a $\mathrm{tr}(A) = 3+3+\lambda$ donc $\lambda = 12$

Soit X de loi $\mathcal{N}((1,0,-1),A)$. Sa fonction caractéristique est $\phi_X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ t \mapsto e^{+i\langle(1,0,-1),t\rangle}\,e^{-\frac{\langle t, At\rangle}{2}} = e^{+it_1 - it_3}\,e^{-\frac{1}{2}\left(4t_1^2+7t_2^2+7t_3^2-4t_1t_2 - 4t_1t_3+8t_2t_3\right)}$

On sait que les espaces propres pour A sont en somme directe orthogonale. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour la vp 12

$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour la vp 3. $\quad v_2 \perp v_1$

Nécessairement $v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour la vp 3

$\left(\frac{v_1}{3}, \frac{v_2}{\sqrt{2}}, \frac{v_3}{3\sqrt{2}}\right)$ est une BON, d'où la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 4/3\sqrt{2} \\ -2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \\ -2/3 & -1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \end{pmatrix}$. ${}^tP\,P = I_3$ et $AP = P\begin{pmatrix} 12 & & 0 \\ & 3 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix}$

Posons $Y = P^{-1}X$. On sait que Y est une variable gaussienne. Son espérance est $E(P^{-1}X) = P^{-1}E(X) = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Sa matrice de covariance est $E\big((P^{-1}X - E(P^{-1}X))\,{}^t(P^{-1}X - E(P^{-1}X))\big) = E\big(P^{-1}(X-E(X))\,{}^t(X-E(X))\,{}^tP^{-1}\big) = P^{-1}A\,{}^tP^{-1} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 12 & & 0 \\ & 3 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix}$

On calcule $P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}/2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ (Observer que $P^{-1} = {}^tP$ puisque P est orthogonale)

On en déduit la fonction caractéristique de Y $\phi_Y(t_1,t_2,t_3) = e^{it_1}\,e^{i\frac{\sqrt{2}}{2}t_2}\,e^{i\frac{\sqrt{2}}{2}t_3}\,e^{-\frac{12}{2}t_1^2}\,e^{-\frac{3t_2^2}{2}}\,e^{-\frac{3t_3^2}{2}} = \phi_{Y_1}(t_1)\,\phi_{Y_2}(t_2)\,\phi_{Y_3}(t_3)$

où ϕ_1 est la fonction caractéristique de la loi $N(1,12)$

ϕ_2 $\qquad$ $N(\frac{\sqrt{2}}{2},3)$

ϕ_3 $\qquad$ $N(\frac{\sqrt{2}}{2},3)$

Comme la fonction caractéristique de Y caractérise la loi de Y, on en déduit que les composantes Y_1, Y_2, Y_3 de Y sont indépendantes et de loi $N(1,12)$, $N(\frac{\sqrt{2}}{2},3)$ et $N(\frac{\sqrt{2}}{2},3)$ respectivement.

On connait les densités de Y_1, Y_2, Y_3, on en déduit la densité de Y : $f_Y(t_1,t_2,t_3) = f_{Y_1}(t_1) f_{Y_2}(t_2) f_{Y_3}(t_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{12}\,\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-\frac{(t_1-1)^2}{24}} e^{-\frac{(t_2-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{6}} e^{-\frac{(t_3-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{6}}$

Maintenant $X = PY$. Comme P est inversible, X admet une densité et $f_X(t) = \frac{1}{|\det P|} f_Y(P^{-1}t)$ (où t est noté en colonne).

(On écrit pour tout φ borné $E(\varphi(X)) = E(\varphi(PY)) = \int \varphi(Pt) f_Y(t)\,dt = \int \varphi(u) f_Y(P^{-1}u)\,|\det P^{-1}|\,du$ donc $u \mapsto |\det P^{-1}|\, f_Y(P^{-1}u)$ est la densité de X)

On peut écrire $f_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi D)}} \exp -\frac{1}{2}\langle t - E(Y), D^{-1}(t-E(Y))\rangle$ où $D = \begin{pmatrix} 12 & & 0 \\ & 3 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix} = \Sigma_Y$

alors $f_X(t) = \frac{1}{|\det P|}\frac{1}{\sqrt{\det(2\pi D)}} \exp -\frac{1}{2}\langle P^{-1}(t-E(X)), D^{-1}P^{-1}(t-E(X))\rangle = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi A)}} \exp -\frac{1}{2}\langle t-E(X), PD^{-1}P^{-1}(t-E(X))\rangle$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi A)}} \exp -\frac{1}{2}\langle t-E(X), A^{-1}(t-E(X))\rangle$$

On a $A^{-1} =$

Autre méthode pour calculer la densité de X :

On sait que A admet une racine carré symétrique B et que X a même loi que $BZ + E(X)$ où Z est un vecteur gaussien de loi $N(0, I_3)$

(Pour le vérifier on calcule la fonction caractéristique de $BZ+E(X)$. D'après I c'est $t \mapsto e^{i\langle t,E(X)\rangle}\phi_Z({}^tB.t) = e^{i\langle t,E(X)\rangle} e^{-\frac{\langle {}^tBt, {}^tBt\rangle}{2}}$

$$= e^{i\langle t,E(X)\rangle} e^{-\frac{\langle t, B^tBt\rangle}{2}}$$

$$= \phi_X(t)$$

puisque $B^tB = B^2 = A$. } Observons qu'on a juste besoin de $B^tB = A$.)

Z admet la densité $t \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\langle t,t\rangle}{2}\right)$ donc $BZ + E(X)$ admet la densité $t \mapsto |\det B^{-1}|\, f_Z(B^{-1}t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{\det A}} \exp\left(-\frac{\langle B^{-1}t, B^{-1}t\rangle}{2}\right)$

et on observe que $\langle B^{-1}t, B^{-1}t\rangle = \langle t, {}^tB^{-1}B^{-1}t\rangle = \langle t, (B^tB)^{-1}t\rangle = \langle t, A^{-1}t\rangle$.

III $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique. On observe que $(0,1,0)$ est vecteur propre de vp 1. Les valeurs propres sont positives donc A est la matrice

$(1,0,1)$ —— 2

$(1,0,-1)$ —— 0

de covariance d'un vecteur gaussien X (explicitement de $X = BZ$ où B est une racine carré symétrique de A et Z est de loi $N(0, I_3)$).

Comme en II on pose $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ matrice de passage d'une BON formée de vecteurs propres de A vers la base canonique

$Y = P^{-1}X$. La matrice de covariance de Y est $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ donc Y a même fonction caractéristique que $(Z_1, Z_2, 0)$ où Z_1 est de loi $N(0,1)$, Z_2 est de loi $N(0,2)$

Donc $Y_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Y_2 \sim \mathcal{N}(0,2)$, Y_1 est indépendante de Y_2 et Y_3 a même loi que la va constante égale à 0

En particulier la probabilité que Y_3 soit différente de 0 est 0, ie $Y_3 = 0$ presque sûrement.

On a $X = PY = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} + Y_3 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Puisque $Y_3 = 0$ p.s., $Y_3 \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0$ p.s. donc $X = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ p.s.

IV $X_1, \dots, X_n$ variables aléatoires i.i.d de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Formons la matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{R})$ et posons $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ | \\ X_n \end{pmatrix}$. X est un vecteur gaussien de matrice de covariance $\sigma^2 I_n$ donc AX est un vecteur gaussien de matrice de covariance $\sigma^2 A\,{}^tA$ (cf I)

$$\phi_{AX}(t_1, t_2) = e^{i \langle (t_1,t_2), A E(X) \rangle} e^{- \langle t, \sigma^2 A\,{}^tA . t \rangle}$$

Les deux composantes de AX sont indépendantes ssi la matrice de covariance $\sigma^2 A\,{}^tA$ est diagonale (si les deux composantes sont indépendantes, leur covariance est nulle donc Σ_{AX} est diagonale. Réciproquement si Σ_{AX} est diagonale alors $\phi_{AX}(t_1,t_2) = \phi_1(t_1)\,\phi_2(t_2)$ où ϕ_1 et ϕ_2 sont les fonctions caractéristiques de variables aléatoires normales donc AX a même loi qu'un couple de variables normales indépendantes.)

$\sigma^2 A\,{}^tA$ est diagonale $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$ En fait $\sigma^2 A\,{}^tA = \begin{pmatrix} \sigma^2 \sum a_i^2 & \sigma^2 \sum a_i b_i \\ \sigma^2 \sum a_i b_i & \sigma^2 \sum b_i^2 \end{pmatrix}$

Ecrivons $Y = \sum a_i X_i$, $Z = \sum b_i X_i$ de sorte que $AX = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$. Si $\sum a_i b_i = 0$ alors $Y \sim \mathcal{N}(E(Y), \sigma^2 \sum a_i^2)$ et $Z \sim \mathcal{N}(E(Z), \sigma^2 \sum b_i^2)$

On a $\begin{pmatrix} E(Y) \\ E(Z) \end{pmatrix} = A\,E(X) = \begin{pmatrix} \sum a_i m \\ \sum b_i m \end{pmatrix}$

Dans le cas général ($\sum a_i b_i$ pas forcément nul) on sait que $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ est une variable gaussienne (somme de va gaussiennes indépendantes). On peut le vérifier avec sa fonction caractéristique :

$$\phi_{\sum a_i X_i}(t) = E\left(\exp\left(it \sum a_i X_i\right)\right) = E\left(\exp\left(i \langle (a_1 t, \dots, a_n t), X \rangle\right)\right) = \phi_X(a_1 t, \dots, a_n t) = e^{it \langle (a_1, \dots, a_n), (m, \dots, m) \rangle} e^{- \langle t(a_1, \dots, a_n), \sigma^2 t (a_1, \dots, a_n) \rangle}$$

$$= e^{itm \sum a_i} e^{-t^2 \sigma^2 \sum a_i^2}$$

donc $\sum a_i X_i \sim \mathcal{N}\left(m \sum_{i=1}^{n} a_i, \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$

Idem pour $\sum_{i=1}^{n} b_i X_i$.