Nom : **Prénom :**

L2 - TD MMAG gp 2 **Interrogation** **10 octobre 2019**

Durée prévue : 40mn. Documents et appareils électroniques interdits

Chaque réponse doit être raisonnablement justifiée

Ex. 1. Soit a un réel. On forme les trois vecteurs $v_1 = (1,1,2)$, $v_2 = (1,a,2a)$ et $v_3 = (1,-1,2)$ de $\mathbb{R}^3$.
Pour quelles valeurs de a la famille (v_1, v_2, v_3) est elle libre ? Génératrice de $\mathbb{R}^3$?
Pour quelles valeurs de a la somme $\mathrm{vect}(v_1,v_2) + \mathrm{vect}(v_3)$ est elle directe ?

Ex. 2. Soit $\mathcal{A} = \{A \in M_3(\mathbb{R}),\ {}^tA = -A\}$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille 3 antisymétriques.
Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
Donner la forme d'un élément de $\mathcal{A}$ et en déduire une base de $\mathcal{A}$.

Ex. 3. On note $\mathbb{R}[X]_2$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2. On pose $P_1 = (X-2)(X-3)$, $P_2 = (X-1)(X-3)$, $P_3 = (X-1)(X-2)$.
Montrer que la famille $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est libre. (On pourra évaluer une combinaison linéaire de P_1, P_2, P_3 successivement en $X = 1$, $X = 2$ et $X = 3$.)
En déduit on que c'est une base de $\mathbb{R}[X]_2$?
Quelles sont les coordonnées du polynôme constant 1 dans $\mathcal{B}$? On pourra utiliser la même indication que ci-dessus.

1. On résoud $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$ d'inconnues x, y, z

1 déf $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+ay-z=0 \\ 2x+2ay+2z=0 \end{cases}$ $L_3 - 2L_2 : 4z = 0 \leadsto z=0$
$L'_1 : x+y=0$
$L'_2 : x+ay=0$
$L'_2 - L'_1 : (a-1)y = 0$

1+1

Si $a \neq 1$ $y=0$ puis (L'_2) $x=0$
$(0,0,0)$ seule solution $\leadsto (v_1,v_2,v_3)$ est libre
Mais alors $\dim \mathrm{vect}(v_1,v_2,v_3) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$
donc (v_1,v_2,v_3) est aussi génératrice

1+1 Si $a=1$ $v_2 = v_1$, la famille (v_1,v_2,v_3) n'est pas libre donc pas génératrice non plus

1 déf Si $a \neq 1$ $\mathrm{vect}(v_1,v_2) \cap \mathrm{vect}(v_3) = \{0\}$ puisque (v_1,v_2,v_3) est libre. la somme est directe

1 Si $a=1$ $\mathrm{vect}(v_1,v_2) = \mathrm{vect}(v_1)$ v_1 n'est pas proportionnel à v_3 donc $\mathrm{vect}(v_1) \cap \mathrm{vect}(v_3) = \{0\}$, la somme est

1 encore directe

2. $\mathcal{A}$ contient 0, est stable par multiplication par ~~cste~~ tout $\lambda \in \mathbb{R}$ car ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA = -\lambda A$ si $A \in \mathcal{A}$

1 déf $\mathcal{A}$ est stable par addition car ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = -A-B = -(A+B)$ si $A, B \in \mathcal{A}$

1 vérif Donc $\mathcal{A}$ est un sev de $M_3(\mathbb{R})$

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ alors ${}^tA = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = -A$ si $a=e=i=0$ et $b=-d$, $c=-g$, $f=-h$

1 d'où la forme $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}$, $b,c,f \in \mathbb{R}$ quelconques

1 $= bE_1 + cE_2 + fE_3$ avec $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

~~Comme~~ b,c,f sont déterminés par A donc (E_1,E_2,E_3) est une base de $\mathcal{A}$

3. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On note $P = a P_1 + b P_2 + c P_3$

$P(1) = a\, P_1(1) + 0 + 0 = 2a$

$P(2) = b\, P_2(2) = -b$

2 $P(3) = c\, P_3(3) = 2c$

$P = 0 \Rightarrow P(1) = P(2) = P(3) = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0$ donc (P_1, P_2, P_3) est libre

1 Comme $\dim \mathbb{R}[X]_2 = 3$ $\left((1, X, X^2) \text{ est une base} \right)$, la famille (P_1, P_2, P_3) est aussi génératrice donc c'est une base

~~Soit~~

1 Il existe donc $a, b, c \in \mathbb{R}$ tq $1 = a P_1 + b P_2 + c P_3$

Nécessairement $1 = (a P_1 + b P_2 + c P_3)(1) = a\, P_1(1) = 2a$

$1 = b\, P_2(2) = -b$

$1 = c\, P_3(3) = 2c$

1 donc $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$, $c = \frac{1}{2}$ $\quad [1]_{(P_1, P_2, P_3)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$