Nom : **Prénom :**

L2 - TD MMAG gp 2 **Interrogation - sujet A** **3 décembre 2019**

Durée prévue : 40mn. Documents et appareils électroniques interdits

Chaque réponse doit être raisonnablement justifiée

2 **Ex.** Soient $v_1 = (2, 1, 1, -1)$ et $v_2 = (1, 2, -2, 1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$ et $V = \mathrm{vect}(v_1, v_2)$. Déterminer une base orthonormée (orthogonale **et** normée) de V.

3 Déterminer l'expression puis la matrice de la projection orthogonale sur V.

2 Déterminer l'expression et la matrice de la projection orthogonale sur $V^\perp$.

3 Quelle est la distance de $u = (1, 1, 1, 1)$ à V ?

$\|v_1\|^2 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + (-1)^2 = 7$. On pose $f_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}(2,1,1,-1)$

$f_0 = v_2 - \underbrace{\dfrac{\langle v_1, v_2\rangle}{\|v_1\|^2}}_{= \frac{2\times 1 + 1\times 2 + 1\times(-2) - 1\times 1}{7} = \frac{1}{7}} v_1 = \dfrac{1}{7}(7v_2 - v_1) = \dfrac{1}{7}(5, 13, -15, 8)$.

$\|f\|^2 = \dfrac{1}{7^2}\Big(25 + \underbrace{(10+3)^2}_{100+60+9} + \underbrace{(10+5)^2}_{100+100+25} + 64\Big)$

$= \dfrac{1}{7^2} 483 \left[= \dfrac{69}{7}\right]$

On pose $f_2 = \dfrac{f}{\|f\|} = \dfrac{1}{\sqrt{483}}(5, 13, -15, 8)$

Alors (f_1, f_2) est une BON de V.

Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ alors $p_V(u) = \langle u, f_1\rangle f_1 + \langle u, f_2\rangle f_2 = \dfrac{2x+y+z-t}{7}(2,1,1,-1) + \dfrac{5x+13y-15z+8t}{483}(5,13,-15,8)$

$= \left(\left(\frac{4}{7} + \frac{25}{483}\right)x + \left(\frac{2}{7} + \frac{65}{483}\right)y + \left(\frac{2}{7} - \frac{75}{483}\right)z + \left(-\frac{2}{7} + \frac{40}{483}\right)t, \dots\right)$

~~donc $[p_V(u)]$~~

$[p_V(u)] = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}(2,1,1,-1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} + \dfrac{1}{483}\begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ -15 \\ 8 \end{pmatrix}(5, 13\ -15\ 8)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ interprétation matricielle de la formule pour $p_V(u)$

$= \dfrac{1}{483}\left(69 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}(2\ 1\ 1\ -1)}_{\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ -15 \\ 8 \end{pmatrix}(5\ 13\ -15\ 8)}_{\begin{pmatrix} 25 & 65 & -75 & 40 \\ 65 & 169 & -195 & 104 \\ -75 & -195 & 225 & -120 \\ 40 & 104 & -120 & 64 \end{pmatrix}}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

D'où $\mathrm{Mat}(p_V) = \dfrac{1}{483}\begin{pmatrix} 301 & 203 & 63 & -98 \\ 203 & 238 & -126 & 35 \\ 63 & -126 & 294 & -189 \\ -98 & 35 & -189 & 133 \end{pmatrix}$ $\left[= \dfrac{1}{69}\begin{pmatrix} 43 & 29 & 9 & -14 \\ 29 & 34 & -18 & 5 \\ 9 & -18 & 42 & -27 \\ -14 & 5 & -27 & 19 \end{pmatrix}\right]$

$p_{V^\perp}(u) = u - p_V(u) = (x, y, z, t) - \dfrac{2x+y+z-t}{7}(2,1,1,-1) - \dfrac{5x+13y-15z+8t}{483}(5,13,-15,8)$

$\mathrm{Mat}(p_{V^\perp}) = \underbrace{I_4}_{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}} - \mathrm{Mat}(p_V) = \dots$

$u = (1,1,1,1) \qquad d(u,V) = \|u - p_V(u)\|$

$p_V(u) = \langle u, f_1\rangle f_1 + \langle u, f_2 \rangle f_2 = \frac{3}{7}(2,1,1,-1) + \frac{11}{483}(5,13,-15,8) = \frac{1}{483}\left(207(2,1,1,-1) + 11(5,13,-15,8)\right)$

$= \frac{1}{483}(469, 350, 42, -119)$

$\left[= \frac{1}{69}(67, 50, 6, -17) \right]$

$u - p_V(u) = \frac{1}{483}\left((483,483,483,483) - (469,350,42,-119)\right) = \frac{1}{483}(14, 133, 441, 602) \qquad \left[= \frac{1}{69}(2, 19, 63, 86)\right]$

$\|u - p_V(u)\| = \frac{1}{69}\sqrt{11730} \qquad \left(= \sqrt{\frac{170}{69}} \right)$

Autre méthode pour calculer l'expression de $p_V((x,y,z,t))$ et la matrice de p_V

On écrit $p_V((x,y,z,t)) = (x',y',z',t')$ alors (x',y',z',t') ~~est solution du système d'équations~~ vérifie :

$\exists \lambda, \mu \quad (x',y',z',t') = \lambda v_1 + \mu v_2 = (2\lambda+\mu, \lambda+2\mu, \lambda-2\mu, -\lambda+\mu)$

$\langle (x',y',z',t') - (x,y,z,t), v_1 \rangle = 0$ soit $(2\lambda+\mu-x)\times 2 + (\lambda+2\mu-y) + (\lambda-2\mu-z) - (-\lambda+\mu-t) = 0$

$\langle (x',y',z',t') - (x,y,z,t), v_2 \rangle = 0$ soit $(2\lambda+\mu-x) + (\lambda+2\mu-y)\times 2 + (\lambda-2\mu-z)\times(-2) + (-\lambda+\mu-t) = 0$

On obtient le système d'équations d'inconnues λ et μ : $\begin{cases} 7\lambda + \mu = 2x + y + z - t \\ \lambda + 10\mu = x + 2y - 2z + t \end{cases}$

$L2 - 10L1 : -69\lambda = -19x - 8y - 12z + 14t$

$L1 - 7L2 : -69\mu = -5x - 13y + 15z - 8t$

d'où $p_V((x,y,z,t)) = \lambda v_1 + \mu v_2 = \frac{19x + 8y + 12z - 14t}{69}(2,1,1,-1) + \frac{5x + 13y - 15z + 8t}{69}(1,2,-2,1)$

$[p_V((x,y,z,t))] = \frac{1}{69}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 & 8 & 12 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 13 & -15 & +8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right)$

$= \frac{1}{69} \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 & 8 & 12 & -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 13 & -15 & +8 \end{pmatrix} \right)}_{= \begin{pmatrix} 43 & 29 & 9 & -14 \\ 29 & 34 & -18 & 5 \\ 9 & -18 & 42 & -27 \\ -14 & 5 & -27 & 19 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

Une formule : Notons $A = \left([v_1]\,[v_2]\right) \in M_{4,2}(\mathbb{R})$. $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ ci-dessus est solution de l'équation ${}^tA A \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = {}^tA \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

Comme $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ (les colonnes de A ne sont pas liées), ${}^tAA$ est inversible et $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = ({}^tAA)^{-1}\,{}^tA \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

Puis $[p_V((x,y,z,t))] = A \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = A({}^tAA)^{-1}\,{}^tA \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. C'est exactement le calcul fait ci-dessus.