f2 ex2 : $(E, \langle\ \rangle)$ espace euclidien. $(e_1, \dots, e_d)$ BON de $V \subset E$

$$p_V : x \mapsto \sum_{i=1}^{d} \langle e_i, x\rangle e_i$$

a) p_V est linéaire car chaque $x \mapsto \langle e_i, x\rangle e_i$ est linéaire.

p_V est à valeurs ds $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_d) = V$

On montre $p_V(x) = x$ pour tout $x \in V$ et alors $p_V(p_V(x)) = p_V(x)$ pour tout $x \in E$ puisque $p_V(x) \in V$, donc p_V est un projecteur (précisément la projection sur $\mathrm{Im}\, p_V = V$ parallèlt à $\mathrm{Ker}\, p_V$).

Il suffit de vérifier $p_V(e_i) = e_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$ puisque p_V est linéaire et $V = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_d)$.

Or $p_V(e_i) = \sum_{j=1}^{d} \langle e_j, e_i\rangle e_j = \langle e_i, e_i\rangle e_i$ car $\langle e_j, e_i\rangle = 0$ si $j \neq i$

$= e_i$ car $\langle e_i, e_i\rangle = 1$

b) On observe d'abord $\mathrm{Ker}\, p_V = V^\perp$:

$x \in \mathrm{Ker}\, p_V \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{d} \langle e_i, x\rangle e_i = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, d\}\ \langle e_i, x\rangle = 0$

car (e_i) est libre

$\Leftrightarrow x \in V^\perp$

car $V = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_d)$

Ensuite $p_V(p_V(x) - x) = \underbrace{p_V(p_V(x))}_{p_V(x)} - p_V(x) = 0$ donc $p_V(x) - x \in \mathrm{Ker}\, p_V$

On a $x = \underbrace{p_V(x)}_{\in V = \mathrm{Im}\, p_V} - \underbrace{(p_V(x) - x)}_{\in \mathrm{Ker}\, p_V = V^\perp}$ donc $E = \mathrm{Ker}\, p_V + \mathrm{Im}\, p_V$

Si $x = p_V(y)$ pour un $y \in E$ et si $p_V(x) = 0$ alors $p_V(\underbrace{p_V(y)}_{= p_V(y)}) = 0$

donc $p_V(y) = 0$ donc $x = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} p_V \cap \operatorname{Im} p_V = \{0\}$

On a donc $E = \operatorname{Ker} p_V \oplus \operatorname{Im} p_V$. On retrouve ainsi $E = V^\perp \oplus V$

L'écriture $x = (x - p_V(x)) + p_V(x)$ est la décomposition de x suivant l'égalité $E = V^\perp \oplus V$. $p_V(x)$ est la projection de x sur V parallèlt à $V^\perp$; $x - p_V(x)$ est la projection de x sur $V^\perp$ parallèlt à V

c) $(f_1, -, f_n)$ base de E. On construit $(e_1, -, e_n)$ inductivement en commençant par e_1 :

On veut $\operatorname{Vect}(e_1) = \operatorname{Vect}(f_1)$ et $\|e_1\| = 1$ donc $e_1 = \pm \frac{1}{\|f_1\|} f_1$

Supposons construit $(e_1, -, e_d)$ BON de $\operatorname{Vect}(f_1, -, f_d)$. On applique 2a-b à $E = \operatorname{Vect}(f_1, -, f_{d+1}) = \operatorname{Vect}(e_1, -, e_d, f_{d+1})$ et à $V = \operatorname{Vect}(f_1, -, f_d)$: on veut $\operatorname{Vect}(e_{d+1}) = V^\perp$ et $\|e_{d+1}\| = 1$

Or $V^\perp = \operatorname{Vect}(f_{d+1} - p_V(f_{d+1}))$

posons $f'_{d+1} = f_{d+1} - p_V(f_{d+1}) = f_{d+1} - \sum_{i=1}^{d} \langle e_i, f_{d+1} \rangle e_i$

il faut et il suffit d'avoir $e_{d+1} = \pm \frac{1}{\|f'_{d+1}\|} f'_{d+1}$

e_{d+1} ne dépend que de $(f_1, \dots, f_{d+1})$ et du choix d'un signe.