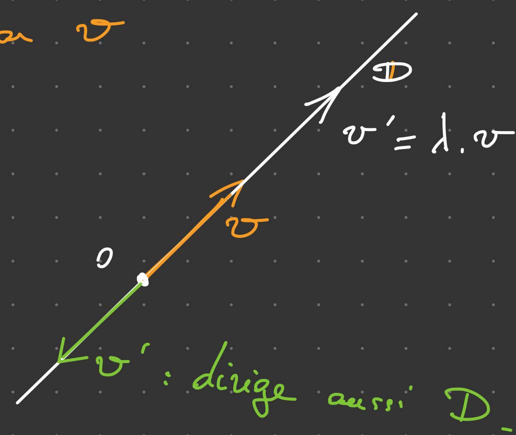
E : espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. $\quad v \in E \setminus \{0\}$.

$D = \mathbb{R}.v$: droite dirigée par v

$= \{\lambda v,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.



Feuille 3

Ex 1. a. On regarde $A.\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_0} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$A.v_0 = v_0. \implies A.D = D$ parce que $D = \mathbb{R}.v_0$.

On veut vérifier que A est orthogonal pour le struct. euc. canonique de $\mathbb{R}^3$.

$\forall A,\quad A \in O(n) \iff {}^tAA = I_n \iff$ ses colonnes forment une b.o.n. de $\mathbb{R}^n$.

$A = \left(C_1 \,\vdots\, \dots \,\vdots\, C_n \right)$, où $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$

on demande $\langle C_i, C_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

P. ex pour la 1ère colonne : $\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$

$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda \neq \pm 1$. $\quad = \dfrac{9 + 6 + 1}{16} = \dfrac{16}{16} = 1$.

$\langle Bv, Bw \rangle = \lambda^2 \langle v, w \rangle$.

Pour la 2^e col : $\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2$

$$= \frac{6 + 4 + 6}{16} = 1.$$

$$\langle C_1, C_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3/4 \\ \overset{+}{-}\sqrt{6}/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{6}/4 \\ 1/2 \\ -\sqrt{6}/4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\langle C_3, C_2 \rangle$

$$= \frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - \overset{1}{3}\sqrt{6}}{16} = 0.$$

$$\langle C_1, C_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3/4 \\ -\sqrt{6}/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 \\ \sqrt{6}/4 \\ 3/4 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{3 - 6 + 3}{16} = 0.$$

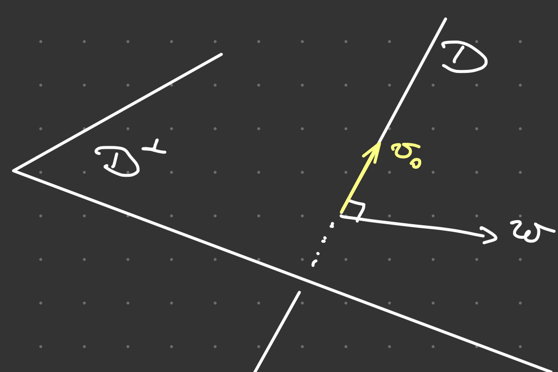
On veut m.q. $A.D^\perp = D^\perp$. Comme $A \in GL_3(\mathbb{R})$
il suffit de voir $A.D^\perp \subset D^\perp$.

$\in$ ~~$\subset$~~

Ingrédients : • $A \in O_3(\mathbb{R})$
• $A.D = D$.

Soit $v \in D^\perp$,

$A.v$



$$v_0^\perp = (\mathbb{R}.v_0)^\perp = D^\perp = \{ w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v_0, w \rangle = 0 \}.$$

+ généralt : Si $X \subset E$ est une partie d'un espace euclidien E, on appelle l'orthogonal de X le s.e.v déf par : $X^\perp = \{ v \in E \mid \forall w \in X, \langle v, w \rangle = 0 \}$

<u>Prop</u> : $X^\perp = \mathrm{Vect}(X)^\perp$.

Ici, prendre $X = \{v_0\}$.

<u>Rappel</u> : Si $F \subset E$ est un s.e.v., alors

$$\boxed{E = F \oplus F^\perp}$$

Ici : $F = D = \mathbb{R}.v_0$, $\quad \mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}.v_0) \oplus \underbrace{(\mathbb{R}.v_0)^\perp}_{\text{plan de } \mathbb{R}^3}$.

Soit $v \in D^\perp$. M.q. $A.v \in D^\perp = v_0^\perp$ $\qquad v_0 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soit $\cancel{w} \in D$, $\langle Av, \cancel{w} \rangle$ $\qquad A.v_0 = v_0$.
$v_0 \qquad\qquad\qquad\qquad v_0$

$$= \langle Av, Av_0 \rangle \underset{\text{car } A \in O_3(\mathbb{R})}{=} \langle v, v_0 \rangle \underset{\text{car } v \in D^\perp = v_0^\perp}{=} 0.$$

<u>CCL</u> : $\forall v \in D^\perp$, $A.v \in v_0^\perp = D^\perp$.

$$A.D^\perp \subset D^\perp.$$

$=$ $\rightsquigarrow$ car $\dim A.D^\perp = \dim D^\perp$

car $A \in GL_3(\mathbb{R})$

car $A \in O_3(\mathbb{R})$...

Si $A \in \cancel{GL_n}\, \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\forall F \subset \mathbb{R}^n$ s.e.v.
$\dim A.F \leqq \dim F$.

$A \notin Gl_n$

b. Déterminer des b.o.n. de D et $D^\perp$.

il suffit d'un vecteur de norme $= 1$.

$$D = \mathbb{R}\cdot \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_0} \qquad \|v_0\| = \sqrt{2}, \text{ prenons } v_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} v_0 = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

Alors $D = \mathbb{R}\cdot v_1$ et $\|v_1\| = 1$.

Donc (v_1) est une b.o.n. de D.

$$\underset{\text{dim} = 2}{D^\perp} = v_0^\perp = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}^\perp$$

$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \in D^\perp$, $\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{:= v_2} \in D^\perp$ forment une base de $D^\perp$.

non-proportionnels

$$\left\langle \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

$$a + c = 0.$$

Posons $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$. Alors (v_2, v_3) forment une b.o.n. de $D^\perp$.

$\rightsquigarrow (v_1, v_2, v_3)$ forme une b.o.n. de $\mathbb{R}^3$

$\underbrace{\text{BON de } D}$ $\overset{\perp}{\oplus}$ $\underbrace{\text{BON } D^\perp}$

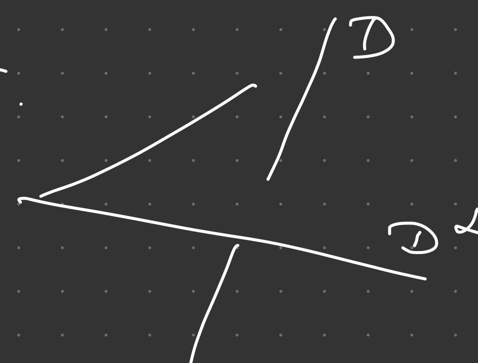
$Mat\left(A|_{D^\perp}\right)$ dans la base (v_2, v_3) ?

Exprimer $\underset{\in D^\perp}{A.v_2}$ et $\underbrace{A.v_3}_{\in D^\perp}$ en fonction de v_2 et v_3.

$$A.v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/4 \\ 1/2 \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix}$$

$A.D^\perp = D^\perp.$

$A \overset{\forall}{v} \in D^\perp.$



$$= \frac{1}{2} v_2 + \begin{pmatrix} \sqrt{6}/4 \\ 0 \\ -\sqrt{6}/4 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\left(A v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} = \sum \lambda_i v_i \\ \neq \text{Coord. dans la base canonique.} \end{matrix} \right)$$

- $A.v_2 = \frac{1}{2} v_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} v_3.$

- $A.v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times (\underset{\substack{\uparrow \\ 1^{\text{ère}}\text{ col.}}}{C_1} - \underset{\substack{\uparrow \\ 3^{\text{ème}}\text{ col.}}}{C_3}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{6}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2} v_2 + \frac{1}{2} v_3.$$

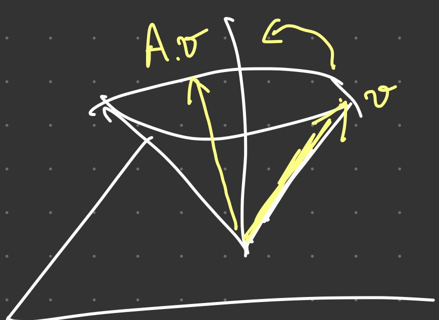
$$\operatorname{Mat}_{(v_2,v_3)}\left(A|_{D^\perp}\right) = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

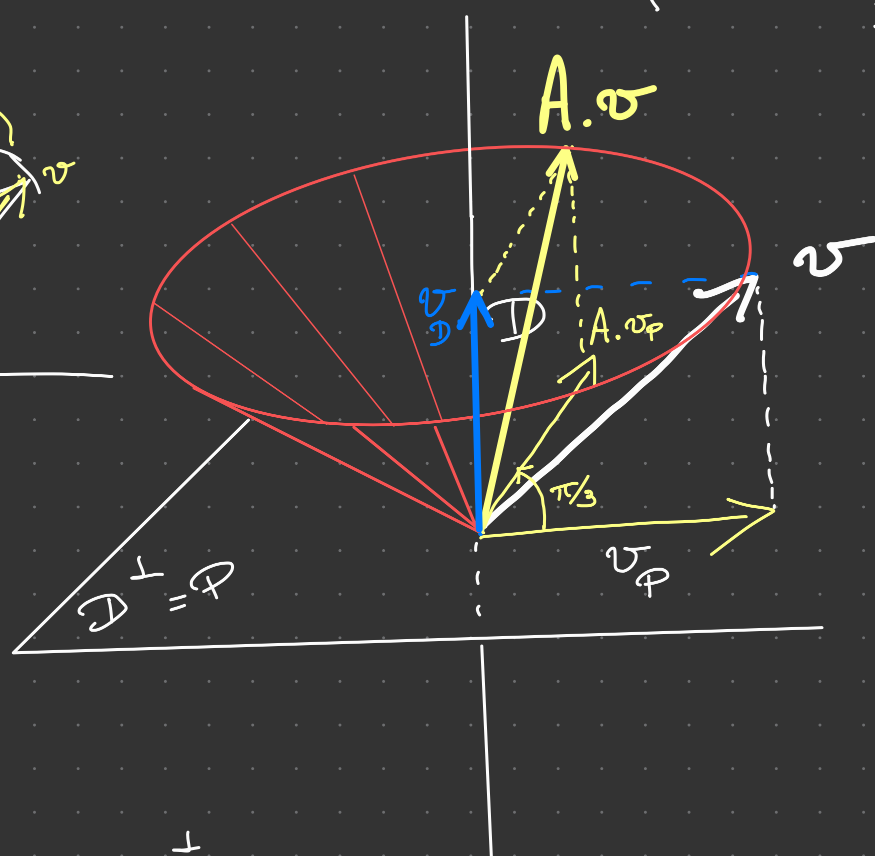
$$= \begin{pmatrix} \cos \pi/3 & -\sin \pi/3 \\ \sin \pi/3 & \cos \pi/3 \end{pmatrix} = R_{\pi/3}.$$

$$A v_0 = v_0 \qquad v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A v_1 = v_1$$

$$\operatorname{Mat}_{(v_1,v_2,v_3)}(A) = \begin{array}{cccc} A v_1 & \overbrace{A v_2 \quad\quad A v_3}^{D^\perp} & & \\ \left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 0 & 0 \\ \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{matrix} & \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right) & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} \end{array}$$





$$\mathbb{R}^3 = D + D^\perp$$

Tout $v \in \mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique :

$$v = v_D + v_P, \quad v_D \in D, \quad v_P \in D^\perp = P.$$

$$A.v = A.v_D + A.v_P$$
$$= v_D + \text{"} R_{\frac{\pi}{3}} . v_P \text{"}.$$

O = Matrice de passage de b.c. $\rightsquigarrow (v_1, v_2, v_3)$.

$$O = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R})$$ caaar...

ses colonnes forment une bon de $\mathbb{R}^3$.

$$O^{-1} A O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & R_{\pi/3} & \end{pmatrix}$$

$$A = O \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & R_{\pi/3} & \end{pmatrix} \times O^{-1}$$

$O^{-1} = {}^tO$ car $O \in O_3(\mathbb{R})$.