Exercice 4 :

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad\qquad C_1 \quad C_2 \quad C_3 \\ \textbf{4. } \text{On pose } R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}). \end{array}$$

4.a. Montrer que R est une matrice orthogonale.

a. On vérifie que les colonnes sont :

1) normées

2) deux à deux orthogonales.

$$\|C_1\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\|C_2\| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\|C_3\| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

ok

$$\hookrightarrow \langle C_1, C_2 \rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0.$$

$$\langle C_1, C_3 \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0.$$

$$\langle C_2, C_3 \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0. \quad \text{OK.}$$

Ainsi, $R \in O_3(\mathbb{R})$.

b) On calcule le polynôme caractéristique de R :

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\chi_R(X) = \det(R - XI_3) = \begin{vmatrix} 1/2 - X & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & 1/2 - X & -1/\sqrt{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - X & 1 - X & 0 \\ 1/2 & 1/2 - X & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -X \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 - X & 0 & 0 \\ 1/2 & -X & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} & -X \end{vmatrix} = (1 - X) \begin{vmatrix} -X & -1/\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} & -X \end{vmatrix}$$

$$C_2 \leftarrow C_2 - C_1$$

$$= (1 - X)\left(X^2 + \frac{1}{4}\right).$$

Deux racines complexes conjuguées, non réelles (à savoir $\pm \frac{i}{2}$)

Ainsi, R a trois vap complexes distinctes 2 à 2 :

$$Sp_{\mathbb{C}}(R) = \left\{ 1, \frac{i}{2}, -\frac{i}{2} \right\}.$$

$\chi_R(X)$ est scindé, à racines simples (sur $\mathbb{C}$), donc R est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, semblable à $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & i/2 & \\ 0 & & -i/2 \end{pmatrix}$

Donc, R n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

4.c. Montrer que $D = \mathbb{R}.\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ est l'unique espace propre réel de R.

On a vu que 1 est vap de R. D'où :

$E_1^{\mathbb{R}}(R) := \{ X \in \mathbb{R}^3 \mid RX = X \} \neq \{0\}$. C'est l'unique espace propre réel.

On précise le corps de l'espace propre.

Comme R a 3 v.a.p. complexes, les espaces propres complexes associés sont nécessairement de $\dim_{\mathbb{C}} = 1$.

Vérifions que $\dim_{\mathbb{R}} E_1^{\mathbb{R}}(R) = 1$:

Soient $X, Y \in E_1^{\mathbb{R}}(R)$. Alors comme $X, Y \in E_1^{\mathbb{C}}(R)$, ils sont colinéaires sur $\mathbb{C}$: $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$,

$$\lambda X + \mu Y = 0.$$ D'où en conjuguant :

$$+ \quad \bar{\lambda} X + \bar{\mu} Y = 0$$ car $X, Y \in \mathbb{R}^3$.

$$\underbrace{(\lambda + \bar{\lambda})}_{\in \mathbb{R}} X + \underbrace{(\mu + \bar{\mu})}_{\in \mathbb{R}} Y = 0 \quad (*)$$

Cas 1 : $\lambda + \bar{\lambda} = \mu + \bar{\mu} = 0$. Alors $\lambda, \mu \in i\mathbb{R}$. D'où $\lambda', \mu' \in \mathbb{R}$ tq $\lambda = i\lambda'$, $\mu = i\mu'$ avec $(\lambda', \mu') \neq (0,0)$.

D'où $i \times \underbrace{(\lambda' X + \mu' Y)}_{=0} = 0$, et (X, Y) est liée sur $\mathbb{R}$.

Cas 2. $\lambda + \bar{\lambda}$ ou $\mu + \bar{\mu}$ est non nul. Alors dans ce cas, la relation $(*)$ est non triviale, à coef. réels, montrant que (X,Y) est liée sur $\mathbb{R}$.

Dans les deux cas, on voit bien que $\dim_{\mathbb{R}} E_1^{\mathbb{R}}(R) = 1$.

Enfin, on calcule :

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

montrant que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_1^{\mathbb{R}}(R)$. D'où $E_1^{\mathbb{R}}(R) = D = \mathbb{R}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$D^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}.$$

Comme $\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = x + y$, l'équation de $D^\perp$ est $\{ x + y = 0 \}$.

Notons $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, de sorte que $D^\perp = v_0^\perp$.

Soit $v \in D^\perp$. Montrons que $R.v \in D^\perp$, i.e. $\langle R.v, v_0 \rangle = 0$.

Or, comme $v_0 = R.v_0$, on a

$$\begin{aligned} \langle R.v, v_0 \rangle &= \langle R.v, R.v_0 \rangle \\ &= \langle v, v_0 \rangle, \text{ car } R \in O_3(\mathbb{R}). \\ &= 0, \text{ car } v \in v_0^\perp. \end{aligned}$$

Ainsi $R(v_0^\perp) \subset v_0^\perp$. Comme R est inversible, $\dim R.v_0^\perp = \dim v_0^\perp$, d'où $R.v_0^\perp = v_0^\perp$.

d)

4.d. Montrer que $\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forme une base orthonormée de $D^\perp$.

Expliciter la matrice de la restriction $R : D^\perp \to D^\perp$ dans cette base orthonormée. En déduire la nature géométrique de la transformation $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Commençons par calculer la norme et le produit scalaire de ces deux vecteurs : normes $1/2 + 1/2 = 1$, $0 + 1 = 1$: OK

p.s. : $0 + 0 + 0 = 0$.

C'est bien une famille orthonormée.

Il suffit de voir que ses éléments sont dans $D^\perp$: l'équation de ce plan étant $x + y = 0$, la vérif. est immédiate.

$$\begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & \end{array}$$

e)

On pose $A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

4.e. Montrer que le premier vecteur-colonne de $A(a,b,c)$ est de norme 1 si et seulement si $a^4 + (a^2+1)(b^2+c^2) = 1$. Montrer que les deux premiers vecteurs-colonne de $A(a,b,c)$ sont orthogonaux si et seulement si $ab(a^2+b^2+c^2-1) = 0$.

$$\begin{aligned} \|C_1\|^2 &= a^4 + (ab+c)^2 + (ac-b)^2 \\ &= a^4 + a^2b^2 + \cancel{2abc} + c^2 + a^2c^2 - \cancel{2abc} + b^2 \\ &= a^4 + (a^2+1)(b^2+c^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_2 \rangle &= a^2(ab-c) + (ab+c)b^2 + (ac-b)(bc+a) \\ &= a^3b - \cancel{a^2c} + ab^3 + \cancel{cb^2} + abc^2 + \cancel{a^2c} - \cancel{b^2c} - ab \\ &= ab(a^2+b^2+c^2-1). \end{aligned}$$

f.

4.f. Retrouver la conclusion de **4.a** en montrant que $R = A(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

Il suffit de remplacer a, b et c par leurs valeurs $1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}$ et 0.

5. Les quatre matrices sont symétriques et réelles.
D'après le théorème spectral, elles sont toutes diagonalisables sur $\mathbb{R}$ en base orthonormée.

Cas de C_1 :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pol. caractéristique : $\chi_{C_1}(X) = \det(C_1 - X I_2)$

$$= \begin{vmatrix} 1-X & 2 \\ 2 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2 - 4$$

$$= (-X-1)(-X+3) = (X-3)(X+1).$$

D'où $Sp_{\mathbb{R}}(C_1) = \{3, -1\}$.

$E_3(C_1) = \mathrm{Ker}(C_1 - 3I_2) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

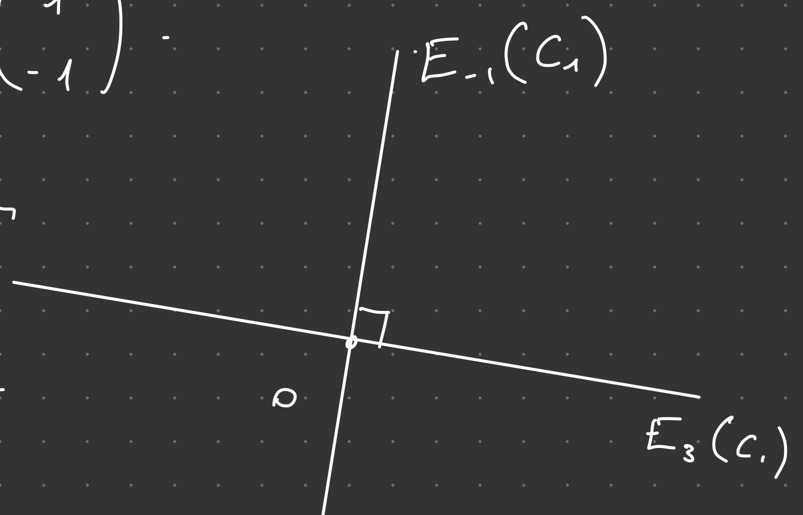
On résout : $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ \Updownarrow \\ \cancel{2x_1 - 2x_2 = 0} \end{cases} \Leftarrow x_1 = x_2.$

$$E_3(C_1) = \mathbb{R}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$E_{-1}(C_1) = \mathrm{Ker}(C_1 + I_2) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(C_1 + I_2)$ ssi $x_1 = -x_2$.

$$E_{-1}(C_1) = \mathbb{R}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



Rem : Les espaces propres d'une matrice sym. réelle sont en somme directe **orthogonale**.

i on sait $E_3(C_1) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, alors

$$E_{-1}(C_1) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}^{\perp} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

(v_1, v_2) est une b.o.n. de v.e.p de C_1.

$$C_1 = P^{-1}\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}P \qquad P \in O(2).$$

$$P = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix} = R_{\frac{\pi}{4}}.$$

$P^{-1} = {}^tP$, car $P \in O(n) = \{ M \mid {}^tMM = I_n \}$

$$= R_{-\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

$$C_2 = \begin{pmatrix}1 & \sqrt{6}\\ \sqrt{6} & 2\end{pmatrix}$$

1) Vap : $\begin{cases}\lambda_1 + \lambda_2 = 3\\ \lambda_1\lambda_2 = -4\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda_1 = -1\\ \lambda_2 = 4\end{cases}$

$$E_{-1}(C_2) = \operatorname{Ker}(C_2 + I_2) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix}2 & \sqrt{6}\\ \sqrt{6} & 3\end{pmatrix}$$

$(x_1, x_2) \in E_{-1}(C_2)$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 2x_1 + \sqrt{6}\, x_2 = 0 \\ \cancel{\sqrt{6}\, x_1 + 3x_2 = 0} \end{cases} \iff \sqrt{2}\, x_1 + \sqrt{3}\, x_2 = 0$$

$$\mathrm{Ker}\,(C_2 + I_2) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \,/\!/$$

$$\mathrm{Ker}\,(C_2 - 4I_2) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\,(C_2 + I_2)^{\perp}.$$

Posons : $V_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $V_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

(V_1, V_2) est <u>un bon de vep.</u>

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} :$$

$$\chi_{C_3}(X) = (1-X)(-2-X) - 4$$
$$= X^2 + X - 6 = (X-2)(X+3).$$

$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\, C_3 = \{2, -3\}.$

$$(x_1, x_2) \in E_2(C_3) \iff \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \quad (\times -2) \longrightarrow \text{inutile.}$$

$$\iff x_1 = 2x_2 \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$E_2(C_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$(x_1, x_2) \in E_{-3}(C_3) \iff \begin{cases} \cancel{4x_1 + 2x_2 = 0} \\ 2x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} 4 & 2 \\ e & 1 \end{matrix}$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}.\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}^{\perp}$$

Prenons $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base canonique vers la base de vep. renormalisés.

D'où $C_3 = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} {}^tP$.

$$C_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$ On calcule $\chi = \chi_{C_1}$.

$$\chi(X) = \begin{vmatrix} 1-X & -3 & -2 \\ -3 & 1-X & 2 \\ -2 & 2 & -3-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-X & -2-X & 0 \\ -3 & 1-X & 2 \\ -2 & 2 & -3-X \end{vmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2 - C_1$

$$\chi(X) = \begin{vmatrix} -2-X & 0 & 0 \\ -3 & 4-X & 2 \\ -2 & 4 & -3-X \end{vmatrix}$$

$$= (-2-X) \times \left[(4-X)(-3-X) - 8 \right].$$

$$= -(X+2)\left(X^2 - X - 12 - 8\right)$$

$$= -(X+2)\underbrace{(X^2 - X - 20)}_{(X+4)(X-5)}.$$

Le spectre de C_4 est réel (comme attendu) :

$$Sp_{\mathbb{R}}\, C_4 = \{5, -2, -4\} : \text{cardinal} = \dim \mathbb{R}^3.$$

Donc les espaces propres associés sont des droites. On peut en voir à "l'oeil nu", et cela suffirait. Sinon, on résout les systèmes $(C_4 - \lambda I_3) X = 0$, dont on sait qu'ils admettent un espace de sol. de dim 1.

$\boxed{\lambda = 5}$: $\begin{cases} -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases}$

On va "pivoter" selon x_3, ce qui revient juste à permuter les x_i.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -7x_1 - 7x_2 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 14x_1 + 14x_2 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{cases}$$

$(\times -2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \text{ paramètre}.$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = -\lambda \\ x_3 = -\lambda/2 \end{cases}$$

$\underline{\text{CCL}}$: $E_5(C_4) = \mathbb{R}.\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda = -2}$ On résout le système $(C_4 + 4I_3)X = 0$.

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ \cancel{-3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0} \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases} \quad (-1)\times$$

$$\iff \begin{cases} \cancel{7}x_1 - \cancel{7}x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 2x_2 - 2x_1 = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = 0 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

$$E_{-2}(C_4) = \mathbb{R}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\lambda = -4}$: On résout le système $(C_4 + 4I_3)X = 0$.

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ \\ \end{array} \begin{cases} x_1 + x_2 + 0 = 0 \\ \cancel{x_1 + x_2 + 0 = 0} \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \\ x_3 = 2x_1 - 2x_2 = 4t \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

D'où $E_{-4}(C_4) = \mathbb{R}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On obtient ainsi une b.o.n. de vep. de C_4 :

$$v_1 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \; ; \; v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; v_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

vap = 5 vap = -2 vap = -4.

Soit $P = (v_1 \mid v_2 \mid v_3)$ la matrice de passage de la base canonique vers (v_1, v_2, v_3). Alors, $P \in O_3(\mathbb{R})$ et on a :

$$\boxed{C_4 = P \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} {}^{t}P.}$$

Exercice 8

8.a. Mq $O_n(\mathbb{Z}) = \{ M = (m_{ij}) \in O_n(\mathbb{R}) \mid m_{ij} \in \mathbb{Z} \}$ est un sous-gp. de $O_n(\mathbb{R})$.

(i) $O_n(\mathbb{Z})$ contient $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Soient $M, M' \in O_n(\mathbb{Z})$.

En notant m_{ij}, m'_{ij} les coef. de M, M' respectivt, le coef (i,j) du produit MM' est donné par :

$$\sum_{k=1}^{n} \underbrace{m_{ik}}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{m'_{kj}}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$$ car $\mathbb{Z}$ est stable par somme et produit.

D'où $M, M' \in O_n(\mathbb{Z}) \Rightarrow MM' \in O_n(\mathbb{Z})$.

(iii) Si $M \in O_n(\mathbb{R})$, son inverse est $M^{-1} = {}^tM$.

Donc, si $M \in O_n(\mathbb{Z})$, alors $M^{-1} = {}^tM$ est à coef. entiers, i.e. $M \in O_n(\mathbb{Z}) \Rightarrow M^{-1} \in O_n(\mathbb{Z})$.

CCL : $O_n(\mathbb{Z}) \neq \emptyset$, stable par produit et passage à l'inverse. C'est donc un ss gpe de $O_n(\mathbb{R})$.

8.b. On va dénombrer $O_n(\mathbb{Z})$.

Soient $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{Z}^n$ les colonnes d'une matrice

de $O_n(\mathbb{Z})$. Nécessairement, chaque C_i a exactement une coordonnée non nulle, et elle vaut ± 1.
En effet, si un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est normé et à coef. $\in \mathbb{Z}$, alors $\underbrace{x_1^2}_{\in \mathbb{N}} + \dots + \underbrace{x_n^2}_{\in \mathbb{N}} = 1$.

Comme les x_i^2 sont ≥ 0, entiers et que leur somme vaut 1, un, et un seul, d'entre eux vaut 1 et les autres sont nuls.

On dénombre :

- $2n$ possibilités pour C_1 (choix du x_i non nul, puis choix de son signe.)
- $2(n-1)$ possibilités pour C_2, car $\langle C_1, C_2 \rangle = 0$ donc C_1 et C_2 ne peuvent pas avoir la même coordonnée non nulle $\rightsquigarrow (n-1)$ choix restant $\times$ 2 signes possibles.

$\vdots$

- 2 choix possibles pour C_n.

Au final, $|O_n(\mathbb{Z})| = 2n \times 2(n-1) \times \dots \times 2$.
$$= 2^n . n!$$

La restriction $\det|_{O_n(\mathbb{Z})}$ est un morphisme à valeurs dans $\{-1, 1\}$, qui est surjectif car $\begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots 1 \end{pmatrix} \in O_n(\mathbb{Z})$ et son $\det = -1$.
Son noyau est $O_n(\mathbb{Z}) \cap SO_n(\mathbb{R})$, et par le thm de Lagrange, on a : $|O_n(\mathbb{Z})| / |O_n(\mathbb{Z}) \cap SO_n(\mathbb{R})| = |\{\pm 1\}|$

D'où $|O_n(\mathbb{Z}) \cap SO_n(\mathbb{R})| = \frac{1}{2}|O_n(\mathbb{Z})| = 2^{n-1} \cdot n!$.

8.c. Soit $M \in O_n(\mathbb{Z})$, de colonnes $C_1, \dots, C_n$.

On a vu que $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, C_j a un seul coef non-nul. Appelons-le $\sigma(j) \in \{1, \dots, n\}$.

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors par déf, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $\exists \varepsilon_j \in \{-1, 1\} \mid C_j = \varepsilon_j e_{\sigma(j)}$.

Maintenant, $\forall j, j' \in \{1, \dots, n\}$, si $\sigma(j) = \sigma(j')$, alors

$$\begin{aligned} \langle C_j, C_{j'} \rangle &= \langle \varepsilon_j e_{\sigma(j)}, \varepsilon_{j'} e_{\sigma(j')} \rangle \\ &= \varepsilon_j \varepsilon_{j'} \underbrace{\langle e_{\sigma(j)}, e_{\sigma(j')} \rangle}_{= 1 \text{ car } \sigma(j) = \sigma(j')} \\ &= \varepsilon_j \varepsilon_{j'} \in \{1, -1\}. \end{aligned}$$

Comme les colonnes sont 2 à 2 orthogonales, on a nécessairement $j = j'$: σ est donc injective, donc bijective puisque $\sigma : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$.

Ainsi, σ est une permutation de $\{1, \dots, n\}$. Appelons $D = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_n \end{pmatrix}$. Alors par déf., $M = P_\sigma . D$, où P_σ est la matrice de la permutation σ.

8.d. La décomposition est unique si on fait le produit dans l'ordre $P_\sigma \times D$. Si on ne tient pas compte de l'ordre des facteurs, alors il n'y a pas unicité :

$n = 2$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{Z})$. Alors $\sigma = \tau$ la transposition $\tau : \begin{matrix} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \end{matrix}$, $P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$M = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P_\sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D'} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P_\sigma}.$$

$$D \neq D'$$