Séance Zoom du 14 octobre (18h15-19h25)

jeudi 14 octobre 2021 18:42

Diagonaliser une matrice symétrique réelle

On commence par calculer χ_A ou bien vecteur propre évident ?

$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour la multiplication à gauche par C_1

$\underbrace{C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{somme des colonnes}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underbrace{(1 \ 1)\, C_1}_{\text{somme des lignes}} = (3 \ 3) = 3\,(1 \ 1)$

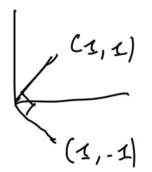
${}^tC_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

E_3 est une droite ?

$\Updownarrow$ $\mathrm{rg}\,(C_1 - 3I) = 2 - 1$?

Puisque C_1 est symétrique, $\underbrace{E_3^{\perp}}_{\text{droite}}$ est stable par C_1

$E_3^{\perp} = \langle (1,-1) \rangle$



$\underbrace{C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{différence des deux colonnes}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

BON : $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ dans cette base, l'endomorphisme de matrice C_1 relative à la base canonique est de matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

En terme de matrices de passage

P = matrice des coord. de la nouvelle base $= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\left(\left(C_1 P = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right.\right.$

$C_1 = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \longleftrightarrow \quad \underbrace{\mathrm{Mat}_{(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1),\, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1))}(u)}_{P^{-1}\, \mathrm{Mat}_{\text{base can.}}(u)\, P} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \qquad C_2 - XI = \begin{pmatrix} 1-X & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2-X \end{pmatrix}$$

$$|C_2 - XI| = (1-X)(2-X) - 6 = X^2 - 3X - 4 = (X - 3/2)^2 - 9/4 - 4$$
$$= (X - 3/2)^2 - \frac{25}{4}$$

$$|C_2 - XI| = 0 \Leftrightarrow X = \underbrace{3/2 \pm \frac{5}{2}}_{-1,\ 4}$$

$$E_{-1} = \mathrm{Ker}\,(C_2 + I) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 3 \end{pmatrix} = \langle (\frac{\sqrt{6}}{2}, -1) \rangle = \langle (\sqrt{6}, -2) \rangle$$

On peut calculer de même $E_4 = \mathrm{Ker}\,(C_2 - 4I)$

ou bien comme $E_{-1}^{\perp} = \langle (2, \sqrt{6}) \rangle$

$\|(\sqrt{6}, -2)\|^2 = 6 + 4 = 10$

BON $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}(\sqrt{6}, -2),\ \frac{1}{\sqrt{10}}(2, \sqrt{6})\right)$ ds cette base $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$ vp évident ?

$$\chi_{C_4} = |C_4 - XI| = \begin{vmatrix} 1-X & -3 & -2 \\ -3 & 1-X & 2 \\ -2 & 2 & -3-X \end{vmatrix} \underset{L_2 + L_1 \to L_1}{=} \begin{vmatrix} -2-X & -2-X & 0 \\ -3 & 1-X & 2 \\ -2 & 2 & -3-X \end{vmatrix}$$

$$= (-2-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1-X & 2 \\ -2 & 2 & -3-X \end{vmatrix} \underset{C_2 - C_1 \to C_2}{=} -(2+X)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4-X & 2 \\ -2 & 4 & -3-X \end{vmatrix}$$

$$= -(2+X)\underbrace{\begin{vmatrix} 4-X & 2 \\ 4 & -3-X \end{vmatrix}}_{-(4-X)(3+X) - 8} = \dots$$

Rq On a trouvé que -2 et vp

On détermine E_{-2} puis une BON de $E_{-2}^{\perp}$

On écrit la matrice de l'endomorphisme de la BON de $E_{-2}^{\perp}$ qui se diagonalisera ds une BON