Feuille d'exercices n^{o}2: Espaces euclidiens

Rappel: Une base $(e_1, \ldots, e_n)$ d'un espace euclidien $(E, \langle -, - \rangle)$ est dite *orthonormée* si $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

1. On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire standard $\langle -, - \rangle$.

1.a. Quelles sont les bases orthonormées de $(\mathbb{R}^2, \langle -, - \rangle)$?

1.b. Montrer qu'une base de $(\mathbb{R}^2, \langle -, - \rangle)$ est orthonormée si et seulement si la matrice carrée A formée par les vecteurs de la base vérifie $A^t A = I_2$. En déduire que l'ensemble de ces matrices forme un groupe.

1.c. Quelles valeurs le déterminant d'une base orthonormée peut-il avoir ?

1.d. Etablir une bijection entre le cercle-unité de $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble des bases orthonormée *directes* (*i.e.* de déterminant $+1$) de $\mathbb{R}^2$.

1.e. Déduire de **1.b** et **1.d** que le cercle-unité possède une structure multiplicative qui en fait un groupe. Avez-vous déjà vu ce groupe auparavant ?

2. Orthonormalisation. Soit $(E, \langle -, - \rangle)$ un espace euclidien.

2.a. Soit $V \subset E$ un sous-espace vectoriel muni d'une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_d)$. Montrer que $p_V : E \to V : x \mapsto \sum_{i=1}^d \langle e_i, x \rangle e_i$ définit un projecteur.

2.b. Montrer que pour $x \in E$ on a $p_V(x) - x \in V^\perp$, que $V^\perp = \ker(p_V)$, et que $E = \ker(p_V) \oplus \mathrm{im}(p_V)$. Interprétation géométrique ?

2.c. A partir d'une base $(f_1, \ldots, f_n)$ de E construire une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de $(E, \langle -, - \rangle)$ telle que $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_d) = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_d)$ pour $d = 1, 2, \ldots, n$. Discuter la non-unicité de cette construction. C'est ce qu'on appelle *l'orthonormalisation de Gram-Schmidt.*

3. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{+1} P(t)Q(t)dt$.

3.a. Montrer que $(E, \langle -, - \rangle)$ est un espace euclidien de dimension 3.

3.b. En appliquant le procédé de Gram-Schmidt à $(1, X, X^2)$ trouver une base orthonormée (L_0, L_1, L_2) de $(E, \langle -, - \rangle)$.

3.c. Montrer que $P \mapsto u(P) = (1 - X^2)P'(X) + (2X + 1)P(X)$ définit un endomorphisme $u : E \to E$. Ecrire u dans la base canonique $(1, X, X^2)$.

3.d. Ecrire u dans la base (L_0, L_1, L_2). En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-1}^{1} (u(P))^2 dt$ en fonction des coefficients (a, b, c) de $P(X) = aL_0 + bL_1 + cL_2$.

4. On pose $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

4.a. Montrer que R est une matrice orthogonale.

4.b. La matrice R est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{C}$?

4.c. Montrer que $D = \mathbb{R}. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est l'unique espace propre réel de R.

Donner l'équation du sous-espace orthogonal $D^\perp$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Montrer que si $v \in D^\perp$ alors $R(v) \in D^\perp$ (i.e. $D^\perp$ est stable sous R).

4.d. Montrer que $\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ forme une base orthonormée de $D^\perp$.

Expliciter la matrice de la restriction $R : D^\perp \to D^\perp$ dans cette base orthonormée. En déduire la nature géométrique de la transformation $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

On pose $A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

4.e. Montrer que le premier vecteur-colonne de $A(a,b,c)$ est de norme 1 si et seulement si $a^4 + (a^2+1)(b^2+c^2) = 1$. Montrer que les deux premiers vecteurs-colonne de $A(a,b,c)$ sont orthogonaux si et seulement si $ab(a^2+b^2+c^2-1) = 0$.

4.f. Retrouver la conclusion de **4.a** en montrant que $R = A(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

5. Diagonaliser chacune des matrices suivantes à l'aide d'un changement de base orthogonal qu'on précisera:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

6. Montrer que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice ${}^tAA$ est symétrique à valeurs propres positives. Si A est symétrique, quel est le lien entre les valeurs propres de ${}^tAA$ et les valeurs propres de A ?

7. Une matrice symétrique réelle est dite (définie) positive si toutes ses valeurs propres sont (strictement) positives.

7.a. Montrer que $S \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique positive si et seulement s'il existe une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.

7.b. Montrer que $S \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive si et seulement s'il existe une matrice $A \in Gl_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.

7.c. Montrer que pour toute matrice symétrique positive S, il existe une et une seule matrice symétrique positive R telle que $R^2 = S$.

8. On note $O_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $A \in O_n(\mathbb{R})$ à coefficients entiers.

8.a. Montrer que $O_n(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

8.b. Quel est le cardinal de $O_n(\mathbb{Z})$ (resp. de $O_n(\mathbb{Z}) \cap SO_n(\mathbb{R})$) ?

8.c. Montrer que tout $A \in O_n(\mathbb{Z})$ s'écrit comme produit d'une matrice de permutation et d'une matrice diagonale à coefficients entiers.

8.d. La décomposition **8.c** est-elle unique ?

MOTS-CLÉS : PRODUIT SCALAIRE, ESPACE EUCLIDIEN, BASE OTHONORMÉE, MATRICE ORTHOGONALE