Feuille d'exercices n^{o}4: Formes quadratiques et espaces hermitiens

1. Vrai ou faux ? On considère ici des formes quadratiques sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Une telle forme quadratique q est dite *anisotrope* (resp. non dégénérée) si $q(v) = 0$ implique $v = 0$ (resp. si la forme bilinéaire symétrique associée est non dégénérée).

1.a. Une forme quadratique non dégénérée est anisotrope.

1.b. Une forme quadratique anisotrope est non dégénérée.

1.c. Une forme quadratique est anisotrope si et seulement si elle est définie positive ou définie négative.

1.d. Une forme quadratique q est définie positive si $q(e_i) > 0$ pour tous les vecteurs d'une base vectorielle (e_i).

2. Déterminer la signature de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ défini par

$$q(x, y, z) = 2x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 4xy - 4xz + 4yz.$$

en utilisant la méthode de Gauss. Déterminer ensuite les valeurs propres de la matrice symétrique $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $q(v) = {}^t vAv$ pour $v \in \mathbb{R}^3$.

3. Diagonaliser les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & i & -i \\ -i & 4 & 1 \\ i & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 2 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}$ dans des bases orthonormées de l'espace hermitien $(\mathbb{C}^3, \langle -, - \rangle)$. Pourquoi savait-on sans calcul que les valeurs propres de A et de B sont réelles ?

4. On considère le sous-espace E du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ engendré par les fonctions $e_k : t \mapsto e^{ikt}$ pour $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$ où $n > 0$.

On munit E de la forme sesquilinéaire symétrique $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) dt$.

4.a. Montrer que $(E, \langle -, - \rangle)$ est un espace hermitien.

4.b. Montrer que $(e_0, e_{\pm 1}, \ldots, e_{\pm n})$ est une base orthonormée de E.

4.c. Montrer que pour tout $f \in E$, on a $\langle f, f \rangle = \sum_{k=-n}^{k=n} |\langle f, e_k \rangle|^2$.

4.d. Montrer que les fonctions $t \mapsto \sin(kt)$ et $t \mapsto \cos(kt)$ appartiennent à E pour $k = 0, 1, \ldots, n$. Que donne la formule **4.c** dans ce cas ?

5. Soit $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ un vecteur de norme 1 de l'espace hermitien $(\mathbb{C}^2, \langle -, - \rangle)$.

5.a. Déterminer les vecteurs $w \in \mathbb{C}^2$ de norme 1 qui sont orthogonaux à v.

5.b. Montrer que toute matrice unitaire spéciale $U \in SU_2(\mathbb{C})$ peut s'écrire

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. En déduire que $SU_2(\mathbb{C}) \cong S^3 \subset \mathbb{R}^4$.

5.c. Montrer que si l'on omet la condition $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ alors les matrices ci-dessus forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{H}$ de dimension 4 admettant les matrices

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \; J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

comme base.

5.d. Montrer les relations $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -\mathbf{1}$. Montrer que $\mathbb{H}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre *normée* dans laquelle la multiplication est induite par le produit matriciel et la norme par le déterminant. En déduire que tout élément non nul de $\mathbb{H}$ possède un inverse multiplicatif. C'est ce qu'on appelle un *corps gauche*.

5.e. Indiquer quelques similitudes et quelques différences entre $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$.

5.f. On associe à tout $U \in SU_2(\mathbb{C})$ le *quaternion* $u \in \mathbb{H}$ défini par **5.c**. Montrer que $SU_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(\mathbb{H}) : U \mapsto c_u$ définit un morphisme de groupes, où c_u désigne la conjugaison par u, i.e. $c_u : \mathbb{H} \to \mathbb{H} : q \mapsto uqu^{-1}$.

5.g.* Les éléments de $\mathrm{Vect}(I, J, K)$ sont appelés *quaternions imaginaires purs*. Montrer que c_u applique imaginaire pur sur imaginaire pur, et induit un automorphisme de $\mathrm{Vect}(I, J, K)$. Montrer qu'on obtient ainsi un morphisme de groupes $SU_2(\mathbb{C}) \to SO_3(\mathbb{R})$ *surjectif* dont le noyau est constitué de $\pm\mathbf{1}$.

6. Montrer que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ il existe un unique couple (H_1, H_2) de matrices hermitiennes tel que $A = H_1 + iH_2$.

Montrer que A est hermitienne (resp. antihermitienne, resp. normale **7.a**) si et seulement si $H_2 = 0$ (resp. $H_1 = 0$, resp. $H_1H_2 = H_2H_1$).

7. Soit ϕ un endomorphisme de l'espace hermitien $(\mathbb{C}^n, \langle -, - \rangle)$ qui se diagonalise dans une base orthonormée.

7.a. Montrer que la matrice A de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ vérifie $AA^* = A^*A$. Une telle matrice est dite *normale*.

7.b. Montrer que tout espace propre E_λ de ϕ est stable par A at par A^*. Montrer la même chose pour $(E_\lambda)^\perp$. En déduire que toute matrice normale A se diagonalise dans une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$.

7.c. Montrer que les matrices hermitiennes, antihermitiennes et unitaires sont normales. Caractériser ces matrices par leurs valeurs propres.

8. Déterminer la signature des formes quadratiques hermitiennes suivantes:

8.a. $q_1(x_1, x_2, x_3) = |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 - i\overline{x_1}x_2 + ix_1\overline{x_2} + i\overline{x_1}x_3 - ix_1\overline{x_3}$.

8.b. $q_2(x_1, x_2, x_3) = |x_1|^2 + 3|x_2|^2 + 6|x_3|^2 + i\overline{x_1}x_2 - ix_1\overline{x_2} + 2ix_2\overline{x_3} - 2i\overline{x_2}x_3$.

Quelles sont les matrices hermitiennes A_1, A_2 correspondant aux formes quadratiques hermitiennes q_1, q_2 ? Trouver des changements de base unitaires qui diagonalisent A_1, resp. A_2.

Mots-clés : Matrice hermitienne, espace hermitien, quaternion, matrice normale, forme quadratique réelle/hermitienne.