(1) $(1 + 1.5 + 2 + 1 + 1.5 + 1)$ + (2) $(1.5 + 1.5 + 1.5 + 1.5)$ + (3) $(2 + 2 + 1 + 1{,}5 + 0{,}5 + 1)$

a b c d e HB a b c d a b c d e HB

Partiel du 27 octobre 2021, Durée : 2h

1. Dualité linéaire. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 3. Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$ on pose

$$\phi_0(P) = P(0),\ \phi_1(P) = P'(1),\ \phi_2(P) = P''(2),\ \phi_3(P) = P'''(3).$$

(7)

1 **1.a.** Montrer que ϕ_i est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_3[X]$ pour $i = 0, 1, 2, 3$. $P_0 = 1$

1.5 **1.b.** Montrer que la famille $(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3)$ est libre. En déduire que c'est une base de l'espace dual $\mathbb{R}_3[X]^*$. $P_1 = X$

1+0.5, 2, 4×0.5 **1.c.** Exhiber la base (P_0, P_1, P_2, P_3) de $\mathbb{R}_3[X]$ dont $(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3)$ est la duale. $P_2 = \frac{X^2}{2} - X$

1 **1.d.** On pose $\Delta : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X] : P(X) \mapsto P'(X+1)$. Montrer que Δ est linéaire. Montrer que $\phi_i \circ \Delta = \phi_{i+1}$ pour $i = 0, 1, 2$. Qu'en est-il de $\phi_3 \circ \Delta$? $P_3 = \frac{X^3}{6} - X^2 + \frac{5X}{2}$

1.5 **1.e.** Montrer que $\Delta(P_i) = P_{i-1}$ pour $i = 1, 2, 3$. *Indication :* on pourra étudier les valeurs de $(\phi_j \Delta)(P_i)$. Qu'en est-il de $\Delta(P_0)$?

+1 **1.f. (Hors barème)** Est-ce que Δ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

2. Rotations. On pose $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

(6)

1.5 = 1+0.5 **2.a.** Montrer que R est une matrice orthogonale.

1.5 **2.b.** Quelles sont les valeurs propres réelles de R ? 1 La matrice R est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? 0.5

1.5 **2.c.** Déterminer l'unique droite D laissée fixe par R. 0.5 Donner l'équation du sous-espace perpendiculaire $D^\perp$ dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle)$. 0.5 Montrer que si $v \in D^\perp$ alors $R(v) \in D^\perp$ 0.5

1.5 **2.d.** Montrer que $\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forme une base orthonormée de $D^\perp$. 0.5

Expliciter la matrice de la restriction $R : D^\perp \to D^\perp$ dans cette base orthonormée. En déduire la nature géométrique de la transformation $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. 1

3. Matrice symétriques et formes quadratiques.

$$\text{Soit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

$E_{-3} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $E_{1} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ $E_{4} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

1.5 + 0.5 = 2 (pol. car.) **3.a.** Quel est le polynôme caractéristique de A ? (1.5) Quelles sont les valeurs (0.5) propres de A ? $-3, 1, 4$

1.5 + 0.5 = 2 (vect. propres norm.) **3.b.** Exhiber une matrice orthogonale P (1.5) et une matrice diagonale (0.5) D telle que $A = PDP^{-1}$.

1 **3.c.** Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ on définit la forme quadratique

$$q(x) = 2(x_2)^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Quel est le lien entre la matrice symétrique A et la forme quadratique q ? 1/2
Quelle est la signature de la forme quadratique q ? 1/2

1.5 **3.d.** Trouver des formes linéaires l_1, l_2, l_3 sur $\mathbb{R}^3$ telle que

$$q(x) = \pm l_1(x)^2 \pm l_2(x)^2 \pm l_3(x)^2.$$

0.5 **3.e.** Existe-t-il des vecteurs $x \neq 0$ tels que $q(x) = 0$? Justifier votre réponse.

+1 **3.f.** **(Hors barême)** Si la réponse du **3.e** est oui, exhiber un vecteur $x \neq 0$ tel que $q(x) = 0$.

BARÊME INDICATIF : 7 + 6 + 7 = 20 PTS

Alg. & Géom. 1 Corrigé du Partiel du 27/10/2021

1.a. La dérivation $D : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ est linéaire, et l'évaluation en un $x \in \mathbb{R}$ est linéaire. $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$ sont donc des composés de fcts lin., donc linéaires.

1.b. Si $\sum_{i=0}^{3} \lambda_i \varphi_i = 0$, alors pour $P = 1$

on obtient $0 = \left(\sum_{i=0}^{3} \lambda_i \varphi_i\right)(P) = \sum_{i=0}^{3} \lambda_i \varphi_i(P)$

$= \lambda_0$

Ensuite, comme $\lambda_0 = 0$, on obtient

$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \varphi_i = 0$. Pour $P = X$, cela donne

$0 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \varphi_i(P) = \lambda_1$.

Donc $\sum_{i=2}^{3} \lambda_i \varphi_i = 0$. Pour $P = X^2$ on obtient alors $0 = \sum_{i=2}^{3} \lambda_i \varphi_i(P) = 2\lambda_2$, d'où $\lambda_2 = 0$

Donc $\lambda_3 \varphi_3 = 0$. Pour $P = X^3$

On obtient $6\lambda_3 = 0$ donc $\lambda_3 = 0$

Par conséquent: $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et

$(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_3)$ est libre.

Puisque, dim $\mathbb{R}_3[X]^* = 4$, on a un système libre maximal, c'est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]^*$.

1.c. (P_0, P_1, P_2, P_3) est antéduale à $(\phi_0, \dots, \phi_3)$ ssi $\phi_i(P_j) = \delta_{ij}$.

$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$

$\phi_0(P_0) = 1$

$\phi_i(P_0) = 0 \quad i = 1, 2, 3.$

$\phi_0(P) = a_0$

$\phi_1(P) = a_1 + 2a_2 + 3a_3$

$\phi_2(P) = 2a_2 + 6 \cdot 2a_3$

$\phi_3(P) = 6a_3$

$P_0 = 1$

$\phi_0(P_1) = 0$

$\phi_1(P_1) = 1$

$\phi_2(P_1) = \phi_3(P_1) = 0$

$a_0 = 0$

$a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 1$

$a_3 = 0 \quad a_2 = 0$

$P_1 = X$

$\phi_0(P_2) = 0 = \phi_1(P_2)$

$\phi_2(P_2) = 1 \quad \phi_3(P_2) = 0$

$a_1 = -1$

$a_0 = 0 \quad a_1 + 2a_2 + \cancel{3a_3} = 0$

$2a_2 = 1 \quad a_3 = 0$

$P_2 = -X + \frac{1}{2}X^2$

(3)

$\phi_0(P_3) = \phi_1(P_3) = \phi_2(P_3) = 0$

$\phi_3(P_3) = 1$ $\quad$ $a_3 = \frac{1}{6}$

$a_0 = 0$

$a_1 + 2a_2 + 0.5 = 0$

$2a_2 + 2 = 0$

$$\boxed{P_3 = \frac{3}{2}X - X^2 + \frac{1}{6}X^3}$$

$a_2 = -1 \quad a_1 = 1.5$

$$\frac{3}{2} - 2X + \frac{X^2}{2} \overset{X=1}{=} 0$$

$$-2 + X \overset{X=2}{=} 0$$

1.d $\quad \Delta : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$

$\qquad P \longmapsto P'(X+1)$

<u>Δ linéaire.</u> $\quad \Delta(P+Q) = (P+Q)'(X+1)$

$$= P'(X+1) + Q'(X+1)$$

$$= \Delta(P) + \Delta(Q)$$

$$\Delta(\lambda P) = (\lambda P)'(X+1)$$

$$= \lambda P'(X+1)$$

$$= \lambda \Delta(P)$$

$$\varphi_i \Delta(P) = \varphi_i P'(X+1) = \left\{ \begin{array}{ll} P'(1) & i=0 \\ P''(2) & i=1 \\ P'''(3) & i=2 \end{array} \right\} = \phi_{i+1}(P)$$

$$\phi_3 \Delta(P) = \phi_3 P'(X+1) = P''''(4) = 0. \quad \forall P.$$

i.e $\Delta(P_i) = P_{i-1}$

2 methods : either by direct verification ($i>0$)

$\boxed{\text{ou}}$ $\phi_j(\Delta(P_i)) = \phi_{j+1}(P_i) = \begin{cases} 0 & j+1 \neq i \\ & j \neq i-1 \\ 1 & j = i-1 \end{cases}$

~~$\phi_3(\Delta(P_i)) = \cos$~~

Cela montre que $\Delta(P_i) = P_{i-1}$ $i>0$

$\boxed{\Delta(P_0) = 0.}$

Verif. directe. $\Delta P_3 = P_3'(X+1)$

$$= \frac{3}{2} - 2(X+1) + \frac{1}{2}(X+1)^2$$

$$= \frac{3}{2} - 2X - 2 + \frac{1}{2}X^2 + X + \frac{1}{2}$$

$$= -X + \frac{1}{2}X^2 = P_2$$

$\Delta P_2 = -1 + (X+1) = X = P_1$

$\Delta P_1 = 1 = P_0$

5

1.f) Dans la base (P_0, P_1, P_2, P_3) la matrice de Δ est.

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \end{array}$$

Le pol. caractéristique est donc X^4.

mais l'espace propre pour $\lambda = 0$.
est de dim $\underline{1}$. Non diagonalisable!

---

2. $$\begin{array}{c} R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \end{array}$$

2a) R est orthogonale $\overset{\text{df.}}{\iff} {}^tRR = I_3$

$\iff (v_1, v_2, v_3)$ b.o.n. de $(\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle)$

$\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$

$\langle v_1, v_3 \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0$ $\quad \langle v_2, v_3 \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0$

$$\|v_1\| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = 1.$$

$$\|v_2\| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = 1.$$

$$\|v_3\| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1.$$

donc (v_1, v_2, v_3) est une b.o.n.

2b

$$P_R(X) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-X & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-X & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -X \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_1 = L_1+L_2}{=} \begin{vmatrix} 1-X & 1-X & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-X & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -X \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_2 = C_2-C_1}{=} \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -X & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & -X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)(X^2+1)$$

Une v.p. réelle unique $\lambda = 1$

$P_R(X)$ n'est pas scindé$/_{\mathbb{R}}$, donc R n'est pas diagonalisable

2.c $D = E_1 = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \end{pmatrix}$

$= \mathbb{R}.\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = 0$

$D^\perp = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \middle| \; x+y=0 \right\}$.

$v \in D^\perp \iff \left\langle v, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = 0$

$R\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

Comme R est orthogonal. $\langle Rv, Rw \rangle = \langle v, w \rangle$

donc $\left\langle Rv, R\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle v, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = 0$

$\qquad \shortparallel$

$\left\langle Rv, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$ d'où $Rv \in D^\perp$.

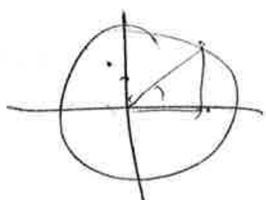
2d Il est clair

que $\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{w_2} \in D^\perp$

En plus les deux vecteurs sont orthogonaux et normés.

$$R\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$



$$R\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$$

$$r_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

D'où $\quad \mathrm{Mat}_{(w_1,w_2)}(R|_{D^\perp}) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = r_{-\frac{\pi}{2}}$

$$\boxed{R = \text{rotation d'axe } \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ et d'angle } -\frac{\pi}{2}}$$

(3)

(3.a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & -3 \\ 1 & 2-X & -1 \\ -3 & -1 & -X \end{vmatrix}$$

$$\underset{=}{L_1 = L_1 + L_3} \begin{vmatrix} -X-3 & 0 & -X-3 \\ 1 & 2-X & -1 \\ -3 & -1 & -X \end{vmatrix}$$

$$\underset{=}{C_3 = C_3 - C_1} \begin{vmatrix} -X-3 & 0 & 0 \\ 1 & 2-X & -2 \\ -3 & -1 & -X+3 \end{vmatrix}$$

$$= -(X+3) \begin{vmatrix} 2-X & -2 \\ -1 & -X+3 \end{vmatrix}$$

$$= -(X+3)(X^2 - 5X + 4)$$

$$= \underline{\underline{-(X+3)(X-1)(X-4)}}.$$

$(X+3)(X^2-5X+4)$

$X^3 - 2X^2 - 11X + 12$

Les valeurs propres sont $\lambda = -3$, $\lambda = 1$, $\lambda = 4$.

(3.b) $E_{-3} = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \cancel{3x + y - 3z = 0} \\ y = 0 \\ x = z \end{array} \right\}$

$\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

(a)

$$E_1 = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 2y - 4z = 0 \\ x + z = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$E_4 = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} x = -z \\ y = -z \end{matrix} \right\}$$

$$= \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$A = PDP^{-1}$ et $P \in O_3(\mathbb{R})$

3.c $q(x) = 2(x_2)^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 2x_2x_3$

$$= (x_1 \ \ x_2 \ \ x_3)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{sgn}(q) = (2,1) = (\#\, v.p > 0,\ \#\, v.p < 0).$$

3.d $2(x_2)^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 6x_1x_3$

$$= 2(x_2^2 + x_1x_2 - x_2x_3) - 6x_1x_3)$$

$$= 2\left(\left(x_2 + \tfrac{1}{2}(x_1 - x_3)\right)^2 - \tfrac{1}{2}(x_1 - x_3)^2 - 6x_1x_3\right.$$

$$\tfrac{1}{2}\left(x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2 + 12x_1x_3\right)$$

$$= 2\left(x_2 + \tfrac{1}{2}(x_1 - x_3)\right)^2 - \tfrac{1}{2}\left(x_1^2 + 10x_1x_3 + x_3^2\right)$$

$$(x_1 + 5x_3)^2 - 24x_3^2$$

$$= 2\left(x_2 + \tfrac{1}{2}(x_1 - x_3)\right)^2 - \tfrac{1}{2}(x_1 + 5x_3)^2 + 12x_3^2$$

$e_1 = \sqrt{2}(x_2 + \tfrac{1}{2}(x_1 - x_3))$ $\quad e_2 = +\tfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + 5x_3)$ $\quad e_3 = \sqrt{12}\,x_3$

3.e Oui, car la trajectoire est limitée.

3.f Oui $\rightarrow \mathbb{R}_-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

annule toute la droite