f^2 ex 3 $E = \{ P \in \mathbb{R}[X],\ \deg(P) \leq 2 \}$, $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t) Q(t)\, dt$

a) E a pour base [canonique] $1, X, X^2$ donc $\dim E = 3$. On observe $(P,Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t) Q(t)\, dt$ est linéaire en P et en Q et est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On montre $\langle P, P \rangle \geq 0$ et $(\langle P, P \rangle = 0$ ssi $P = 0)$. La première propriété vient de $t \mapsto P(t)^2$ est à valeurs positives et de la positivité de l'intégrale.

Si $P \neq 0$ alors $\exists t_0 \in [-1,1]$, $P(t_0) \neq 0$ (car P ne peut alors avoir qu'un nombre fini de racines), puis $P^2(t) \geq \frac{P(t_0)^2}{2}$ sur un voisinage V de t_0 par continuité de $t \mapsto P(t)$, mais alors

$$\int_{-1}^{1} P^2 \geq \int_V P^2 \geq \int_V \frac{P(t_0)^2}{2} = \frac{P(t_0)^2}{2} \times \operatorname{long}(V) > 0$$

b) On applique ex 2c à $(f_1, f_2, f_3) = (1, X, X^2)$

$L_0 = \frac{1}{\sqrt{\langle f_1, f_1 \rangle}} f_1$ $\qquad \langle f_1, f_1 \rangle = \int_{-1}^{1} 1\, dt = 2$ $\quad$ d'où $L_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$f_2' = f_2 - \operatorname{proj}_{\operatorname{Vect}(L_0)}(f_2) = f_2 - \underbrace{\langle \tfrac{1}{\sqrt{2}}, f_2 \rangle}_{\int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{2}} dt = 0} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{cf ex 2})$$

$$= f_2 = X$$

puis $L_1 = \frac{1}{\| f_2' \|} f_2' = \frac{1}{\sqrt{\langle f_2, f_2 \rangle}} f_2$.

$\langle f_2, f_2 \rangle = \int_{-1}^{1} t^2\, dt = \frac{2}{3}$ $\quad$ d'où $L_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} X$

$$f_3' = f_3 - \operatorname{proj}_{\operatorname{Vect}(L_0, L_1)}(f_3) = f_3 - \underbrace{\langle \tfrac{1}{\sqrt{2}}, f_3 \rangle}_{\int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{2}} dt = \frac{2}{3\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2}} - \underbrace{\langle \tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} X, f_3 \rangle}_{\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} t^3 dt = 0} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} X$$

$$= X^2 - \frac{1}{3}$$

puis $L_2 = \frac{1}{\| f_3' \|} f_3'$. $\qquad \langle f_3', f_3' \rangle = \langle X^2 - \frac{1}{3}, X^2 - \frac{1}{3} \rangle = \underbrace{\langle X^2, X^2 \rangle}_{\int_{-1}^{1} t^4 dt = \frac{2}{5}} - \frac{2}{3} \underbrace{\langle X^2, 1 \rangle}_{\int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}} + \frac{1}{9} \underbrace{\langle 1, 1 \rangle}_{\int_{-1}^{1} 1\, dt = 2}$

$$= \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{8}{45} = \frac{2}{5} \left(\frac{2}{3} \right)^2$$

$L_2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \frac{3}{2} (X^2 - \frac{1}{3})$

On a obtenu $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} X, \frac{3}{2} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} (X^2 - \frac{1}{3}) \right)$ BON de E

$(f_2 \text{ ex}3)$ c) $u : P \mapsto (1-X^2)P' + (2X+1)P$ à valeurs ds $\mathbb{R}[X]$

u est linéaire car $P \mapsto P'$ est linéaire et, pour $Q \in \mathbb{R}[X]$ fixé, $P \mapsto QP$ est linéaire.

$\deg(u(P)) \leq \deg(P) + 1$. On montre $u(E) \subset E$ en observant $\deg(u(1)), \deg(u(X)) \leq 2$

et $u(X^2) = (1-X^2)2X + (2X+1)X^2 = 2X + X^2 \in E$

Conclusion u restreint à E est un endomorphisme $E \to E$

On a $u(1) = 2X+1$, $u(X) = (1-X^2) + (2X+1)X = 1+X+X^2$

d'où $\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad u(a+bX+cX^2) = (a+b) + (2a+b+2c)X + (b+c)X^2$

d) $u(L_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} u(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2X+1)$, $u(L_1) = u\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}X\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1+X+X^2)$, $u(L_2) = u\left(\frac{3}{2}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right)\right)$
$= \frac{3}{2}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\left(u(X^2) - \frac{1}{3}u(1)\right)$

Pour $x \in E$ on a $x = \langle L_0, x\rangle L_0 + \langle L_1, x\rangle L_1 + \langle L_2, x\rangle L_2$; cf ex2a avec $V = E$

d'où $\mathrm{Mat}_{(L_0,L_1,L_2)}(u) = \left(\langle L_i, u(L_j)\rangle\right)_{i,j} = \dots = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{2}{3}\sqrt{3} & 1 & \frac{2}{3}\sqrt{5}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{2}{15}\sqrt{5}\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

Autre méthode, plus rapide : on écrit $1, X, X^2$ dans la base (L_0, L_1, L_2)

sans utiliser le produit scalaire : $1 = \sqrt{2} L_0$

$X = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} L_1$

$X^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} L_2 + \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} L_2 + \frac{\sqrt{2}}{3} L_0$

puis $u(L_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}X = L_0 + \frac{2}{\sqrt{3}} L_1$

$u(L_1) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1+X+X^2) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}L_0 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}L_1 + \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}L_2 + \frac{\sqrt{2}}{3}L_0\right) = \left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)L_0 + L_1 + \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}L_2$

$u(L_2) = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\left(2X + X^2 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}X\right)$

$= \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}X + X^2\right) = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}L_0 + \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}L_1 + \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}L_2 + \frac{\sqrt{2}}{3}L_0\right)$

$= \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}L_1 + L_2$

On retrouve la matrice donnée plus haut.

$\int_{-1}^{1} \left(u(aL_0 + bL_1 + cL_2)\right)^2(t)\,dt = \langle u(aL_0+bL_1+cL_2), u(aL_0+bL_1+cL_2)\rangle$

$= \left\| aL_0 + \frac{2}{\sqrt{3}}aL_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}bL_0 + bL_1 + \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}bL_2 + \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}cL_1 + cL_2 \right\|^2$

$= \left(a + \frac{\sqrt{3}}{3}b\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}a + b + 2\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}c\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}b + c\right)^2$ puisque (L_0, L_1, L_2) est BON