Ex. 5 :

a) $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$. Déterminer les $\begin{pmatrix}\gamma\\\delta\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ tq $\left\langle \begin{pmatrix}\gamma\\\delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}\right\rangle = 0$
unitaire
et $\left\| \begin{pmatrix}\gamma\\\delta\end{pmatrix} \right\| = 1$.

$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

On impose $|\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$.

$$\left\langle \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\gamma\\\delta\end{pmatrix}\right\rangle = \bar{\alpha}\gamma + \bar{\beta}\delta = 0.$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i \ ; \text{ pour } x, y \in \mathbb{C}^n.$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}-\bar{\beta}\\\bar{\alpha}\end{pmatrix}}_{\neq 0}\right\rangle = -\bar{\alpha}\bar{\beta} + \bar{\beta}\bar{\alpha} = 0.$$

Par conséquent, tout vect. de $\mathbb{C}.\begin{pmatrix}-\bar{\beta}\\\bar{\alpha}\end{pmatrix}$ est $\perp \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$.

Comme $\dim_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}^{\perp} = 1$, on a $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}^{\perp} = \mathbb{C}.\begin{pmatrix}-\bar{\beta}\\\bar{\alpha}\end{pmatrix}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. À quelle condition $z.\begin{pmatrix}-\bar{\beta}\\\bar{\alpha}\end{pmatrix}$ est de norme 1 ?

Sachant que $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ est déjà normé.

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\quad \langle \lambda v, \lambda v \rangle = |\lambda|^2 . \langle v, v \rangle$.
$\forall v \in E$: hermitien

Ainsi, $\left\| z.\begin{pmatrix}-\bar{\beta}\\\bar{\alpha}\end{pmatrix} \right\|^2 = |z|^2 . \left\| \begin{pmatrix}-\bar{\beta}\\\bar{\alpha}\end{pmatrix} \right\| = |z|^2 . \overbrace{(|\beta|^2 + |\alpha|^2)}^{=1}$
$= |z|^2$

$z \cdot \begin{pmatrix} -\overline{\beta} \\ \overline{\alpha} \end{pmatrix}$ est normé ssi $|z| = 1$ ssi $z = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Les vecteurs cherchés sont de la forme : $e^{i\theta}\begin{pmatrix} -\overline{\beta} \\ \overline{\alpha} \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

b. $SU_n(\mathbb{C}) \underset{\text{déf}}{=} \{ M \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det M = 1 \text{ et } M^* M = I_n \}$

où $M^* = {}^t\overline{M}$. $\quad MM^* = I_2 \quad \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$

$M \in M_2(\mathbb{C})$, $M = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$. $M^* = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} \\ \overline{\gamma} & \overline{\delta} \end{pmatrix}$.

$$M^* M = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 & \overline{\alpha}\gamma + \overline{\beta}\delta \\ \overline{\gamma}\alpha + \overline{\delta}\beta & |\gamma|^2 + |\delta|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc, $M^* M = I_2$ ssi $\begin{cases} |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \ |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1 \\ \overline{\alpha}\gamma + \overline{\beta}\delta = 0. \end{cases}$

$M \in U_2(\mathbb{C})$ ssi $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ sont normés et orthogonaux pour la structure hermitienne standard de $\mathbb{C}^2$.

Si on fixe $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, alors $\begin{pmatrix} \delta \\ \gamma \end{pmatrix}$ est de la forme $e^{i\theta}\begin{pmatrix} -\overline{\beta} \\ \overline{\alpha} \end{pmatrix}$.

D'où $U_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -e^{i\theta}\overline{\beta} \\ \beta & e^{i\theta}\overline{\alpha} \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \ \theta \in \mathbb{R}, \ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$

Ainsi, comme $\det \begin{pmatrix} \alpha & -e^{i\theta}\overline{\beta} \\ \beta & e^{i\theta}\overline{\alpha} \end{pmatrix} = e^{i\theta} \cdot \det \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$.

$$= e^{i\theta}\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right) = e^{i\theta}.$$

Ainsi, $SU_2(\mathbb{C}) = \{ M \in U_2(\mathbb{C}) \mid \det M = 1 \}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix},\ \alpha,\beta \in \mathbb{C},\ |\alpha|^2+|\beta|^2 = 1 \right\}.$$

$\forall n \geq 0$, la sphère $\mathbb{S}^n$ est le lieu dans $\mathbb{R}^{n+1}$ donné par l'équation $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$.

Donc $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ a pour équ. $x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1$.

$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, avec $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Alors $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2$

Ainsi, $M \in SU_2(\mathbb{C}) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ tq $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

$$\Updownarrow$$

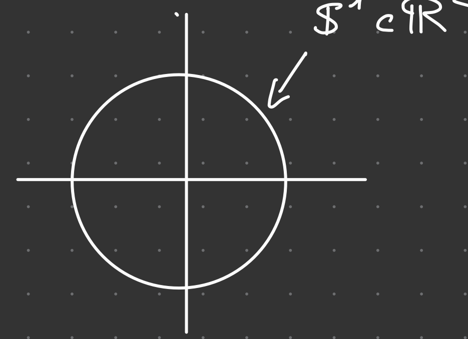
un point sur $\mathbb{S}^3$.

On déf. $\Phi : \mathbb{S}^3 \longrightarrow SU_2(\mathbb{C})$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \underbrace{x_0 + i x_1}_{\alpha} & \underbrace{-x_2 + i x_3}_{-\bar{\beta}} \\ \underbrace{x_2 + i x_3}_{\beta} & \underbrace{x_0 - i x_1}_{\bar{\alpha}} \end{pmatrix}$$

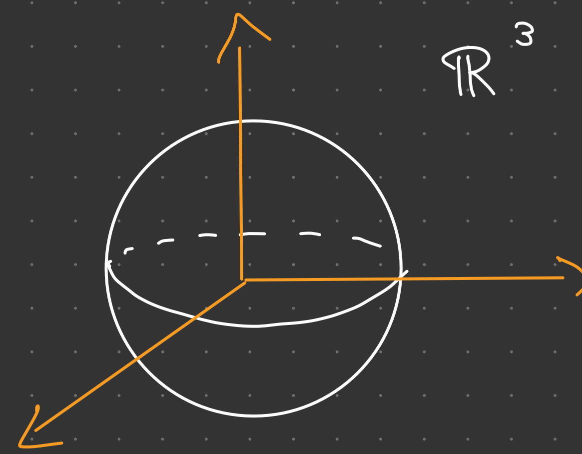
Φ est bijective. $\quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

Car $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^3$.



$\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 : \quad \{ x_0^2 + x_1^2 = 1 \}$

$\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 : \quad \{ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1 \}$



c. Posons $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

$\rightsquigarrow$ m.q. c'est un sous $\mathbb{R}$-ev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, de $\dim_{\mathbb{R}} = 4$, de base I_2, I, J, K.

Si $\begin{pmatrix} \alpha_1 & -\overline{\beta_1} \\ \beta_1 & \overline{\alpha_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 & -\overline{\beta_2} \\ \beta_2 & \overline{\alpha_2} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$, alors

Somme : $\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & -\overline{(\beta_1 + \beta_2)} \\ \beta_1 + \beta_2 & \overline{\alpha_1 + \alpha_2} \end{pmatrix}$

$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\overline{\beta_1} \\ \beta_1 & \overline{\alpha_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 & -\lambda\overline{\beta_1} \\ \lambda\beta_1 & \lambda\overline{\alpha_1} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 & -\overline{(\lambda\beta_1)} \\ \lambda\beta_1 & \overline{\lambda\alpha_1} \end{pmatrix}$$

car $\overline{\lambda} = \lambda$. Ça ne marcherait pas si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

La matrice nulle est dans $\mathbb{H}$ ($\alpha = \beta = 0$).

<u>CCL</u> : $\mathbb{H}$ est un sous $\mathbb{R}$-ev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

On écrit $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$. D'où :

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\alpha_2 & -\beta_1 + i\beta_2 \\ \beta_1 + i\beta_2 & \alpha_1 - i\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha_1 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$+ \beta_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $1, I, J, K$ sont génératrice (sur $\mathbb{R}$) de $\mathbb{H}$.

Libre ? Si $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ sont tq $\alpha_1 1 + \alpha_2 I + \beta_1 J + \beta_2 K = 0$

on tire que $\begin{pmatrix} \alpha_1 + i\alpha_2 & -\beta_1 + i\beta_2 \\ \beta_1 + i\beta_2 & \alpha_1 - i\alpha_2 \end{pmatrix} = 0$.

$\Rightarrow \alpha_1 + i\alpha_2 = \beta_1 + i\beta_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$.

$$\overset{I}{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}} \overset{J}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = K$$

$$IJK = K^2 = -1.$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$IJ = K, \quad JK = I, \quad KI = J$$

$$JI = -K \text{ etc} \ldots$$

Un élt. $\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$ est inversible dans $M_2(\mathbb{C})$ ssi son dét est $\neq 0$.

Or, $\det \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = |\alpha|^2 + |\beta|^2 > 0$

dès que $\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \neq 0$.

Tout élt $\neq 0$ de $\mathbb{H}$ est inversible.

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Rappel : Sur $\mathbb{C}^n$, le p.s. hermitien standard est donné par :

$$<x, y> = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i \quad , \text{ où } \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ | \\ y_n \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ de norme 1 si $\overline{\alpha}.\alpha + \overline{\beta}.\beta = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

$\|x\|^2 = <x, x>$ $\quad \underbrace{\|v\|^2}_{>0} \neq \underbrace{\sum v_i^2}_{\in \mathbb{C}}$. $\notin \mathbb{R}$.

$<\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\overline{\beta} \\ \overline{\alpha} \end{pmatrix}>$ $\quad \|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$.

$= -\overline{\alpha}\overline{\beta} + \overline{\beta}\overline{\alpha}$ $\quad \underset{\neq 0}{v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}}$: $\underbrace{1^2 + i^2}_{\text{ne norme pas } \mathbb{C}^2} = 0$.

$= 0$

On sait que $v^\perp = \{ w \in \mathbb{C}^2 \mid <v, w> = 0 \}$ est une droite complexe de $\mathbb{C}^2$. (dès que $v \neq 0$).

$\begin{pmatrix} -\overline{\beta} \\ \overline{\alpha} \end{pmatrix}$ est non nul, et appartient à cette droite.

D'où $v^\perp = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} -\overline{\beta} \\ \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \{ \lambda . \begin{pmatrix} -\overline{\beta} \\ \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{C} \}$

Soit $w \in v^\perp$. Condition pour $<w, w> = 1$?

$\exists \lambda \in \mathbb{C} \mid w = \lambda . \begin{pmatrix} -\overline{\beta} \\ \overline{\alpha} \end{pmatrix}$, posons $w_0 = \begin{pmatrix} -\overline{\beta} \\ \overline{\alpha} \end{pmatrix}$

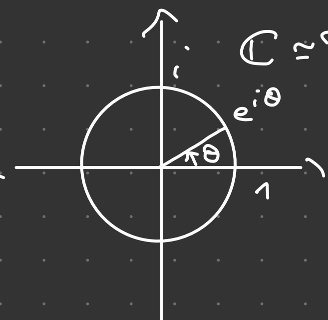
$$<w, w> = <\underset{\text{anti-linéaire}}{\lambda} w_0, \underset{\text{linéaire}}{\lambda} w_0> = \overline{\lambda}.\lambda <w_0, w_0>$$

$$\langle w, w\rangle = |\lambda|^2 \cdot \big(\overbrace{|\beta|^2 + |\alpha|^2}^{=1}\big) = |\lambda|^2 .$$

$$\boxed{\langle \lambda u, \mu v\rangle = \bar{\lambda}\mu \langle u, v\rangle .}$$ dans un espace hermitien.

<u>CCL</u> : il faut prendre λ de module $= 1$.

i.e. $\lambda = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.



Finalement, les vecteurs w en question sont les :

$$\left\{ e^{i\theta} \cdot \begin{pmatrix} -\bar{\beta} \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \ \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

b. Rappel : $U_2(\mathbb{C}) = \{ M \in \underbrace{M_2(\mathbb{C})}_{GL_2(\mathbb{C})} : M^* M = I_2 \}$.

$$M^* = {}^t\bar{M}$$

$$SU_2(\mathbb{C}) = \{ M \in U_2(\mathbb{C}) : \det M = 1 \}.$$
$$= U_2(\mathbb{C}) \cap \underbrace{SL_2(\mathbb{C})}_{\{M \in M_2(\mathbb{C}) \,:\, \det M = 1\}}.$$

Soit $M = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

Calculons $M^* . M$, $M^* = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} & \bar{\delta} \end{pmatrix}$.

$A = A^*$

$$A = M^* M = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 & \bar{\alpha}\gamma + \bar{\beta}\delta \\ \bar{\gamma}\alpha + \bar{\delta}\beta & |\gamma|^2 + |\delta|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$M \in U_2(\mathbb{C})$ ssi $M^* M = I_2$

ssi $\begin{cases} |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \\ |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1 \\ \bar{\alpha}\gamma + \bar{\beta}\delta = 0 \end{cases}$

$v := \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$

$M \in U_2(\mathbb{C})$ ssi $\|v\| = \|w\| = 1$ et $v \perp w$.

ssi $\|v\| = 1$ et $w = e^{i\theta} \cdot \begin{pmatrix} -\bar{\beta} \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix}$.

$\theta \in \mathbb{R}$.

$$U_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -e^{i\theta}\bar{\beta} \\ \beta & e^{i\theta}\bar{\alpha} \end{pmatrix}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & -e^{i\theta}\bar{\beta} \\ \beta & e^{i\theta}\bar{\alpha} \end{pmatrix} = e^{i\theta}(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta}) = e^{i\theta}.$$

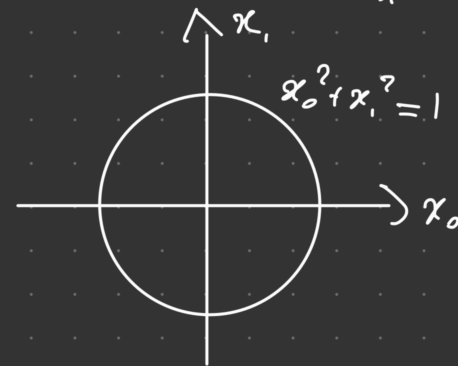
$$SU_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

<u>Rappel</u> : Pour $n \geqslant 0$, la sphère $\mathbb{S}^{n}$ est le lieu :

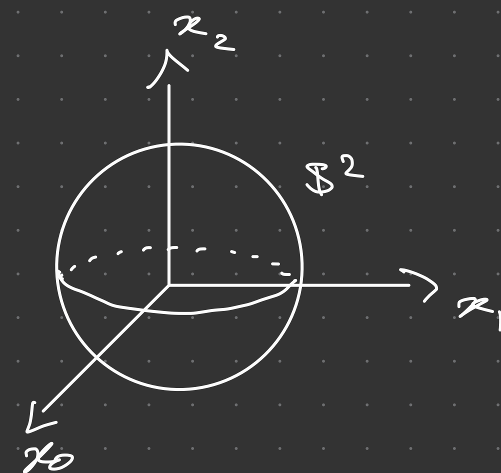
$$\{ x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\{ \|x\|_{euc} = 1 \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

<u>Ex</u> : $n = 1$. $\quad \mathbb{S}^1 = \{ (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 : x_0^2 + x_1^2 = 1 \}$.



$$\mathbb{S}^2 = \{ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^3$$



$$\mathbb{S}^3 = \{ x \in \mathbb{R}^4 \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \}.$$

Définissons $\quad \Phi : \mathbb{S}^3 \longrightarrow SU_2(\mathbb{C})$

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \underbrace{x_0 + i x_1}_{\alpha} & \underbrace{-x_2 + i x_3}_{-\bar{\beta}} \\ \underbrace{x_2 + i x_3}_{\beta} & \underbrace{x_0 - i x_1}_{\bar{\alpha}} \end{pmatrix}$$

Comme $\begin{pmatrix} x_0 \\ | \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^3$, $\quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, d'où $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, donc $\Phi\begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \\ x_4 \end{pmatrix} \in SU_2(\mathbb{C})$.

Φ injective : clair.

Φ surjective : on vient de le montrer.

Φ est une bijection de $\mathbb{S}^3$ sur $SU_2(\mathbb{C})$.

c. $\mathbb{H} = \left\{ M \in M_2(\mathbb{C}), \ M = \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$.

M.q. $\mathbb{H}$ est un sous $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de $M_2(\mathbb{C})$.

- $\mathbb{H} \ni 0$: OK, $\alpha = \beta = 0$.

- $\mathbb{H}$ stable par somme :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -\overline{\beta_1} \\ \beta_1 & \overline{\alpha_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 & -\overline{\beta_2} \\ \beta_2 & \overline{\alpha_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & -\overline{(\beta_1 + \beta_2)} \\ \beta_1 + \beta_2 & \overline{\alpha_1 + \alpha_2} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}.$$

associé aux nombres $\alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_1 + \beta_2$.

- $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda . \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha & -\lambda\overline{\beta} \\ \lambda\beta & \lambda\overline{\alpha} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \lambda\alpha & -\overline{(\lambda\beta)} \\ \lambda\beta & \overline{\lambda\alpha} \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\text{car}}} \quad \lambda = \bar{\lambda} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

<u>CCL</u> : $0 \in \mathbb{H}$ et $\mathbb{H}$ stable par combi. linéaire réelle.

$\rightarrow$ $\mathbb{H}$ est un sous $\mathbb{R}$-ev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

$\dim_{\mathbb{C}}$: 4 $\qquad$ $\dim_{\mathbb{R}}$: 8

Re Im

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Une matrice de $\mathbb{H}$ s'écrit : $M = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \\ \beta = \beta_1 + i\beta_2 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\alpha_2 & -\beta_1 + i\beta_2 \\ \beta_1 + i\beta_2 & \alpha_1 - i\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$M = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \beta_1 \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-\beta_2) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \alpha_1 \mathbb{1} + \alpha_2 I + \beta_1 J - \beta_2 K.$$

$\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathbb{1}, I, J, K) = \mathbb{H}$.

$(\mathbb{1}, I, J, K)$ libre sur $\mathbb{R}$? Soit $x_1 \dots x_4 \in \mathbb{R}$.

$$x_1 \mathbb{1} + x_2 I + x_3 J + x_4 K$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + i x_2 & -x_3 - i x_4 \\ x_3 - i x_4 & x_1 - i x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + i x_2 = 0 \\ x_3 - i x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \ x_2 = 0 \\ x_3 = 0, \ x_4 = 0. \end{cases}$$

D'où $(\mathbb{1}, I, J, K)$ libre : c'est une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{H}$.

$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$: $I^2 = -\mathbb{1}$. $(-id)$

$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: $J^2 = -\mathbb{1}$

$K = -i \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: $K^2 = -\mathbb{1}$.

$$IJ = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = K$$

$$IJK = K^2 = -\mathbb{1}.$$

Soit $M = \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$\det M = \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = |\alpha|^2 + |\beta|^2.$$

$$\det M \neq 0 \iff \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff M \neq 0.$$

Si $M \neq 0$, alors $M^{-1} = \dfrac{1}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \times \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$.

Tout élt non nul de $\mathbb{H}$ admet un inverse dans $\mathbb{H}$.

<u>NB</u> : $\mathbb{H}$ n'est pas commutatif.

P. ex : $IJ = K$ et $JI = -K$.