Feuille d'exercices n^{o}1: Dualité linéaire

0. Révisions.

0.a. Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}_2[X] = \{a + b.X + c.X^2 \,|a, b, c \in \mathbb{R}\}$ des polynômes réels de degré au plus 2 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.

0.b. Montrer que $B_1 = (1, X, X^2)$ et $B_2 = (1, X + 1, (X + 1)^2)$ sont des bases de $\mathbb{R}_2[X]$. Quelle est la matrice de passage Q de B_1 vers B_2 ?

0.c. Montrer que $\phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $\phi(P) = P - P'$ est une application linéaire. Quel est son noyau ? Quelle est son image ?

0.d. Soient $A_1 = \mathrm{Mat}_{B_1}(\phi)$ et $A_2 = \mathrm{Mat}_{B_2}(\phi)$. Montrer que $A_1 = A_2$. Montrer que $A_1Q = QA_1$. Pouvait-on obtenir ce résultat sans calcul ?

0.e. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de ϕ. Est-ce que ϕ est diagonalisable/trigonalisable sur $\mathbb{R}$?

1. Base duale. On considère les trois vecteurs $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ définis par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.a. Montrer que le système (v_1, v_2, v_3) est libre dans $\mathbb{R}^3$. En déduire que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

1.b. Montrer qu'il existe une unique forme linéaire $\phi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $\phi_1(v_1) = 1, \phi_1(v_2) = \phi_1(v_3) = 0$. Calculer $\phi(v)$ pour $v \in \mathbb{R}^3$.

De même, calculer $\phi_2(v)$ pour l'unique forme linéaire ϕ_2 telle que $\phi_2(v_1) = \phi_2(v_3) = 0, \phi_2(v_2) = 1$.

Enfin, faites le même calcul pour l'unique forme linéaire ϕ_3 telle que $\phi_3(v_1) = \phi_3(v_2) = 0, \phi_3(v_3) = 1$.

1.c. Montrer que le système (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est libre dans $(\mathbb{R}^3)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. En déduire que c'est une base. *Rappel:* C'est la base *duale* de (v_1, v_2, v_3).

1.d. Montrer que tout $v \in \mathbb{R}^3$ s'écrit $v = \phi_1(v)v_1 + \phi_2(v)v_2 + \phi_3(v)v_3$. Pourquoi les $\phi_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ s'appellent aussi *fonctions coordonnées* ?

2. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\leq n$.

2.a. Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$? Indiquer une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.b. Montrer que pour tout entier naturel i, la fonction $\phi_i : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} : P \mapsto \frac{P^{(i)}(0)}{i!}$ définit une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, nulle pour $i > n$.

2.c. Montrer que le système $(\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n)$ est libre dans $(\mathbb{R}_n[X])^*$. En déduire que c'est une base.

2.d. Exhiber un système de polynômes $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ tel que $\phi_i(P_j) = \delta_{ij}$, i.e. $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et $(\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n)$ et sa base duale.

2.e. Que donne l'identité $P = \phi_0(P)P_0 + \phi_1(P)P_1 + \cdots + \phi_n(P)P_n$ (cf. **1.d.**) pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$?

2.f. Pour un entier naturel i, déterminer le sous-espace vectoriel des polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ annulés par $\phi_0, \ldots, \phi_i$. Quelle est sa dimension ?

3. Polynômes d'interpolation de Lagrange. On considére $n+1$ points $a_0, \ldots, a_n$ de $\mathbb{R}$ deux à deux distincts. On note $\alpha_i : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\alpha_i(P) = P(a_i)$.

3.a. Montrer que les α_i sont des formes linéaires et que le système $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.

3.b. Expliciter des polynômes $L_i, i = 0, 1 \ldots, n$ tels que $\alpha_i(L_j) = \delta_{ij}$. Ce sont les polynômes d'interpolation de Lagrange.

3.c. Expliciter les polynômes de Lagrange (L_0, L_1, L_2) dans le cas particulier $n = 2$ et $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (-1, 0, 1)$. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifiant $P(0) = \frac{P(-1)+P(1)}{2}$.

4. On considère pour tout entier naturel i, la fonction suivante sur $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\psi_i(P) = \int_{-1}^{1} t^i P(t) dt.$$

4.a. Montrer que ψ_i est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

4.b. Montrer que le système $(\psi_0, \ldots, \psi_n)$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$. *Indication:* On pourra déduire de $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \psi_i = 0$ que $\int_{-1}^{1} P^2(t) dt = 0$ pour un polynôme P bien choisi ...

4.c. Trouver la base (P_0, P_1, P_2) de $\mathbb{R}_2[X]$ dont (ψ_0, ψ_1, ψ_2) est la duale.

5. Hyperplans. Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$ s'appelle un *hyperplan* de $\mathbb{R}^n$.

5.a. Montrer que le noyau d'une forme linéaire non-nulle ϕ sur $\mathbb{R}^n$ est un hyperplan H de $\mathbb{R}^n$. On dit que H est défini par ϕ.

5.b. Montrer que deux formes linéaires non-nulles ϕ, ψ définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles.

5.c. Montrer que pour trois formes linéaires non-nulles ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 avec hyperplans H_1, H_2, H_3 on a $H_3 \supset H_1 \cap H_2$ si et seulement si $\phi_3 \in Vect(\phi_1, \phi_2)$.

5.d. Application: on considère l'hyperplan H_1 (resp. H_2) de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (resp. $2x_1 + 3x_3 = 0$). Montrer que $D = H_1 \cap H_2$ est une droite vectorielle, et déterminer l'equation de l'hyperplan $H \subset \mathbb{R}^3$ contenant la droite D et le vecteur $(1, 1, 1)$.

6. Orthogonalité, somme et intersection. Soient V, W deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.

6.a. Montrer que $(V + W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$.

6.b. Montrer que $(V \cap W)^\perp = V^\perp + W^\perp$.

Indication: dans les deux questions une inclusion est facile à établir. L'égalité s'obtient alors par un calcul de dimensions.

Mots-clés : forme linéaire, base duale, dualité linéaire, dimension