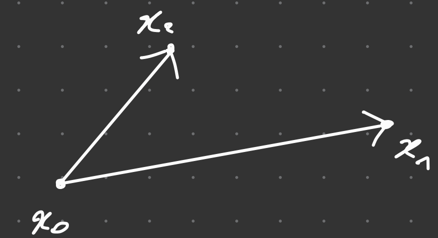
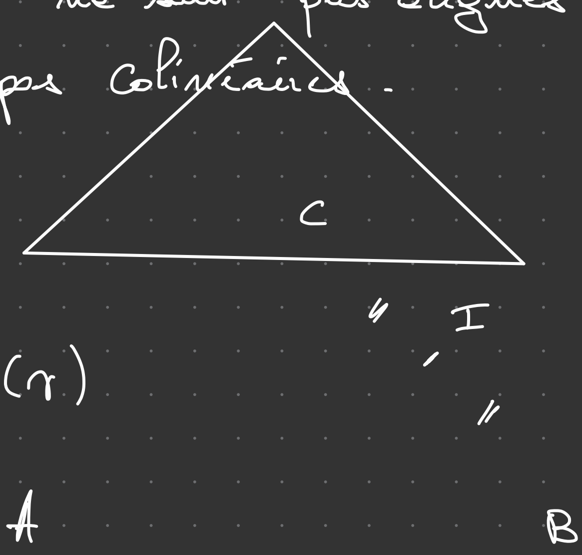
Feuille 5

Exercice 2 : On se place dans $\mathbb{R}^2$ avec sa structure affine standard.

a) (x_0, x_1, x_2) est un repère affine si (par déf) $(\overrightarrow{x_0x_1}, \overrightarrow{x_0x_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ (comme espace vectoriel)



L'enveloppe convexe de $\{x_0, x_1, x_2\}$ est d'intérieur non vide ssi le triangle $x_0x_1x_2$ est non aplati, i.e. si les points x_0, x_1 et x_2 ne sont pas alignés, i.e. si $\overrightarrow{x_0x_1}$ et $\overrightarrow{x_0x_2}$ ne sont pas colinéaires.



b) Rappel : Pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tq $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, le barycentre de $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ est l'unique pt G du plan tq $\forall x \in$ Plan,

$$(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{Gx} = \alpha\overrightarrow{Ax} + \beta\overrightarrow{Bx} + \gamma\overrightarrow{Cx}.$$

Autrement dit, G est la "moyenne pondérée" de A, B et C une fois qu'on a vectorialisé le plan affine ($\hookrightarrow$ choix de x) :

$$G = \mathrm{bar} \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}$$

$\alpha + \beta + \gamma$

$$\ll G = \frac{\alpha A + \beta B + \gamma C}{\alpha + \beta + \gamma} \gg.$$

(et ceci ne dépend pas

de la vectorialisation)

Si on impose la normalisation $\alpha+\beta+\gamma=1$, alors tout point est caractérisé par ses coordonnées barycentriques :

$\forall P \in$ Plan, $\exists! (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tq $\alpha+\beta+\gamma=1$ et

$$P = \mathrm{bar}\ \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}$$

(α,β,γ) = coord. barycentriques dans (A,B,C).

La question est l'équation de la médiane (AI) dans les coordonnées barycentriques.

Coordonnées de A : $(1,0,0)$

Coordonnées de I : $(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

Un pt $P \in (AI) \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \mid P = \mathrm{bar}\ \begin{array}{c|c} A & I \\ \hline t & 1-t \end{array}$.

La prop. d'associativité des barycentres nous donne alors :

$$P \in (AI) \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \mid P = \mathrm{bar}\ \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline t & \frac{1-t}{2} & \frac{1-t}{2} \end{array}.$$

Les coordonnées barycentriques des points de (AI) sont donc les triplets $(\underset{t_1}{t}, \underset{t_2}{\frac{1-t}{2}}, \underset{t_3}{\frac{1-t}{2}})$, $t \in \mathbb{R}$.

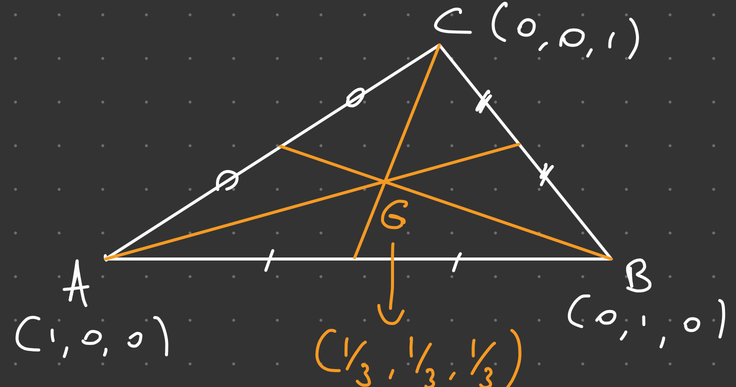
On veut donc le système d'équations dans $\mathbb{R}^3$ qui définit cette droite affine. On a déjà $t_1+t_2+t_3=1$ et on voit que $t_2=t_3$.

On vérifie $\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 1 \\ \boxed{t_2 = t_3} \end{cases} \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} t_1 = t \\ t_2 = \frac{1-t}{2} \\ t_3 = \frac{1-t}{2} \end{cases}$

Équation de (AI) en coordonnées barycentriques.

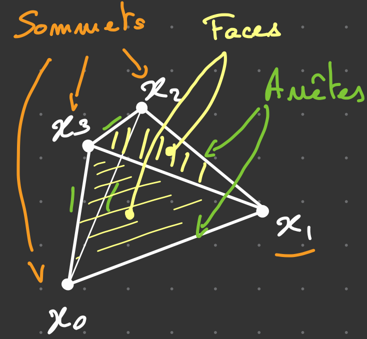
c) Par symétrie, celle de la médiane issue de B est $t_1 = t_3$ et celle de la médiane issue de C est $t_1 = t_2$.

Les trois médianes se rencontrent donc au point de coordonnées barycentriques $(1/3, 1/3, 1/3)$ (i.e. $t_1 = t_2 = t_3$). C'est l'isobarycentre du triangle (le centre de gravité).



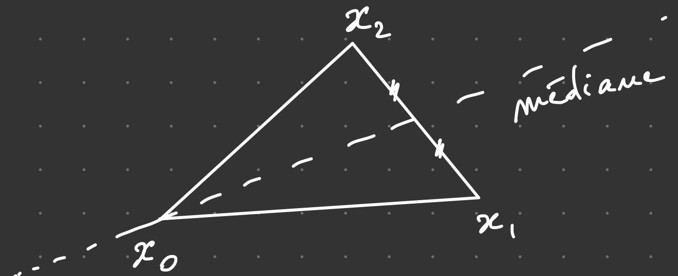
d) <u>Généralisation aux tétraèdres de $\mathbb{R}^3$.</u>

On se donne 4 points x_0, x_1, x_2, x_3 de l'espace affine. On suppose qu'ils forment un repère affine, ce qui est équivalent à ce que $\mathrm{Conv}(\{x_0, x_1, x_2, x_3\})$ soit d'intérieur non-vide i.e. $x_0 - x_3$ sont <u>non-coplanaires</u> (on ne s'attarde pas à justifier cela) i.e. ils définissent un tétraèdre non-aplati de l'espace affine.



Quelle est la "médiane" issue d'un sommet, disons x_3 ?

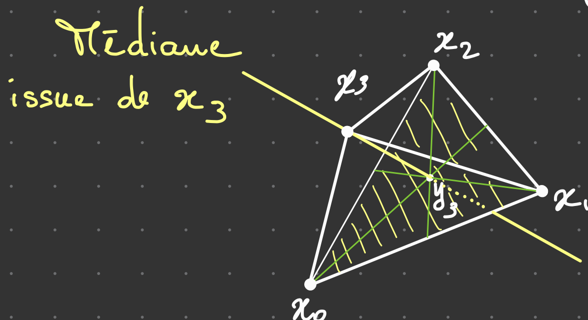
Triangle :



Pour définir la médiane d'un triangle, on prend le milieu <u>DU</u> coté opposé au sommet

isobarycentre.

Tétraèdre :



On voit que <u>le</u> bon objet qui est opposé à x_3 est la <u>face</u> $(x_0 x_1 x_2)$

On veut son "milieu", c'est à dire son centre de gravité y_3.

La médiane issue de x_3 est la droite $(x_3 y_3)$. Quelle est son équation en coordonnées barycentriques dans le repère affine (x_0, x_1, x_2, x_3) ?

Elle passe par $x_3 \ (0,0,0,1)$ et par

$y_3\,(1/3,\ 1/3,\ 1/3,\ 0)$. Comme ci-dessus on obtient que $(x_3 y_3)$ est définie en coordonnées barycentriques

par $t_0 = t_1 = t_2$.

(en paramétrique $\left(\frac{t}{3}, \frac{t}{3}, \frac{t}{3}, 1-t\right)$, $t \in \mathbb{R}$).

Par symétrie les 4 médianes ont pour équation :

$(x_0 y_0)$: $t_1 = t_2 = t_3$ (médiane issue de x_0)
$(x_1 y_1)$: $t_0 = t_2 = t_3$ (———————— x_1)
$(x_2 y_2)$: $t_0 = t_1 = t_3$ (———————— x_2)
$(x_3 y_3)$: $t_0 = t_1 = t_2$ (———————— x_3)

Il est alors limpide qu'elles se rencontre au centre de gravité du tétraèdre, de coordonnées $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Il est tout aussi clair que ceci se généralise en toute dimension aux simplexes "non aplatis" de $\mathbb{R}^n$.
(= polytope à $n+1$ sommets)

Pour les curieux, je recommande de visionner le chap. 3 du film "Dimension" d'Alvarez, Ghys et Leys. www.dimensions-math.org , qui aide à imaginer ce que sont les polyèdres de l'espace de dimension 4.