Feuille d'exercices n^{o}3: Groupe orthogonal et formes quadratiques

1. Rotations. On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard. On considère la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ et la droite $D \subset \mathbb{R}^3$ définies par

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \text{ et } D = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.a. Montrer que $A(D) = D$. Montrer que pour tous $v, w \in \mathbb{R}^3$ on a $\langle v, w\rangle = \langle Av, Aw\rangle$. En déduire que $A(D^\perp) = D^\perp$.

1.b. Expliciter une base orthonormée B_1 de D et une base orthonormée B_2 de $D^\perp$. En déduire que $B = B_1 \cup B_2$ est une base orthonormée de $\big(\mathbb{R}^3, \langle -, -\rangle\big)$.

1.c. Expliciter la matrice R de l'endomorphisme $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dans la base B obtenue ci-dessus. En déduire la nature géométrique de cet endomorphisme.

1.d. Expliciter une matrice orthogonale $O \in O_3(\mathbb{R})$ telle que $A = ORO^{-1}$.

2. Réflexions. Soit $(E, \langle -, -\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Soit $H \subset E$ l'hyperplan et $v \in E$ un générateur de $H^\perp$. On définit la transformation

$$\rho_H : E \to E : x \mapsto x - 2\frac{\langle x, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v.$$

2.a. Montrer que ρ_H laisse fixe l'hyperplan H et renverse la droite $\mathbb{R}.v$. En déduire que ρ_H est une transformation orthogonale de déterminant -1.

2.b. Quels sont les valeurs et espaces propres de ρ_H ? Quelle est la matrice de ρ_H dans une b.o.n. de E formée par des vecteurs propres de ρ_H ?

2.c. Soient H_1, H_2 deux hyperplans distincts de E. Soit v_1 (resp. v_2) un générateur de $H_1^\perp$ (resp. $H_2^\perp$). Montrer que si $v_1 \perp v_2$ alors ρ_{H_1} et ρ_{H_2} commutent. *Indication:* Etablir le résultat d'abord pour $n = 2$. En déduire le cas général en restreignant aux sous-espaces orthogonaux $(H_1 \cap H_2) \perp \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

3. Matrices de permutation. Pour une permutation $\sigma \in \Sigma_n$, on note $A_\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'unique application linéaire vérifiant $A_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$, $i = 1, \ldots, n$.

3.a. Montrer qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ses vecteurs-colonnes forme une b.o.n. En déduire que A_σ est une transformation orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

3.b. Montrer que l'application $\sigma \mapsto A_\sigma$ définit un morphisme de groupes injectif $\Sigma_n \to O_n(\mathbb{R})$, donc Σ_n est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

3.c. Montrer que pour une transposition $\sigma = (i\ j)$ on obtient la réflexion $A_\sigma = \rho_{H_{ij}}$ p/r à l'hyperplan $H_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_i = x_j\}$, cf. **2.** pour la notation.

3.d. Expliciter un générateur v_{ij} de $H_{ij}^\perp$. Montrer que si $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$ alors $v_{ij} \perp v_{kl}$.

3.e. En combinant **3.d.** et **2.c.** conclure que les réflexions $\rho_{H_{ij}}$ et $\rho_{H_{kl}}$ commutent. En donner une preuve alternative à l'aide de **3.b.**.

4. On considère la matrice $H = (h_{ij})$ définie par $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$ pour $i, j = 1, 2, \ldots, n$, en se plaçant dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

4.a. Montrer que $h_{ij} = \int_0^1 t^{i+j-2} dt$.

4.b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $f_x(t) = (\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1})^2$ est continue et à valeurs positives pour $t \in [0, 1]$.

4.c. En déduire que la forme quadratique associée à H est définie positive.

5. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ des polynômes réelles de degré ≤ 2. On munit E de la forme bilinéaire symétrique

$$<P, Q>= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

5.a. Montrer que $<-,->$ est définie positive.

5.b. Déterminer les produits scalaires $< X^{i-1}, X^{j-1} >$ pour $1 \leq i, j \leq 3$.

5.c. En vous servant de **5.b** trouver des polynômes P_0, P_1, P_2 tels que $\deg(P_i) = i$ et (P_0, P_1, P_2) forme une base orthonormée de $(E, <-,->)$.

5.d. Quel est l'orthogonal de l'ensemble des polynômes $P \in E$ vérifiant $P(0) = 0$? *Indication:* effectuer les calculs dans le repère orthonormé du **5.c**.

6. On considère sur l'espace euclidien $(\mathbb{R}^3, <-,->)$ la forme quadratique

$$q(v) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz \quad \text{pour} \quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

6.a. Expliciter $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $q(v) = {}^t v A v$ pour $v \in \mathbb{R}^3$.

6.b. Indiquer une matrice orthogonale $P \in O_3(\mathbb{R})$ telle que ${}^t PAP$ soit diagonale. En déduire la signature de la forme quadratique q.

6.c. Trouver des formes linéaires l_1, l_2, l_3 sur $\mathbb{R}^3$ telles que pour tout $v \in \mathbb{R}^3$ on ait $q(v) = \pm l_1(v)^2 \pm l_2(v)^2 \pm l_3(v)^2$.

7. On considère la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

7.a. Déterminer les valeurs et espace propres de A. En déduire une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale D.

7.b. Montrer que $\langle Av, v \rangle = {}^t w D w$ pour $w = P^{-1}v$. En déduire l'existence d'un vecteur non-nul $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $\langle Av, v \rangle = 0$.

7.c. Déterminer la signature de la forme quadratique définie par

$$q(x, y, z) = 3x^2 + 4xy + 4xz + 2yz.$$

Mots-clés : rotation, réflexion, groupe orthogonal, matrice de permutation, forme quadratique, signature