Contrôle du 3 décembre 2021, Durée : 0h55

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 3 & i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$.

On se place dans l'espace hermitien standard $(\mathbb{C}^3, \langle -, - \rangle)$.

a. Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A. Pourquoi les valeurs propres sont-elles réelles ? On les ordonnera de sorte que $\lambda < \mu < \nu$.

b. Expliciter la forme hermitienne $q(v) = \langle v, Av \rangle$ pour $v \in \mathbb{C}^3$. Quelle est sa signature ? Y a-t-il des vecteurs non nuls $v \in \mathbb{C}^3$ tels que $q(v) = 0$?

c. Calculer l'espace propre E_λ de A. Exhiber un vecteur propre de norme 1 ayant la valeur propre λ.

d. Donner l'équation de $(E_\lambda)^\perp$. Montrer que A laisse stable $(E_\lambda)^\perp$. Les espaces propres E_μ et E_ν sont-ils contenus dans $(E_\lambda)^\perp$?

e. Indiquer une base orthonormée de $(\mathbb{C}^3, \langle -, - \rangle)$ formée par des vecteurs propres de A. En déduire une matrice unitaire $U \in M_3(\mathbb{C})$ telle que $U^* A U$ contienne les valeurs propres de A dans l'ordre naturel.

f. Donner la formule d'une matrice $R \in M_3(\mathbb{C})$ telle que $R^2 = A$. Existe-t-il plusieurs matrices ayant cette propriété ?

Barème indicatif : 2+1.5+1.5+1.5+2+1.5 = 10 pts

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 3 & i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix} \quad a) \quad \chi_A = \begin{vmatrix} 2-X & i & 0 \\ -i & 3-X & i \\ 0 & -i & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)\left((3-X)(2-X)+i^2\right) + i^2(2-X)$$

2

$$= (2-X)\underbrace{\left(X^2-5X+4\right)}_{\left(X-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}$$

$$= (2-X)(X-4)(X-1)$$

${}^t\bar{A} = A \Rightarrow \chi_A$ scindé sur $\mathbb{R}$ racines $1, 2, 4$

b) $(\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z})\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2|x|^2 + 3|y|^2 + 2|z|^2 + i\bar{x}y - ix\bar{y} + i\bar{y}z - iy\bar{z}$

1,5 $\operatorname{sgn}(q) = (3,0)$ ⇝ définie positive pas de vecteur isotrope

c) $E_1 = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 2 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix} = \langle (1, i, -1) \rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{3}}(1, i, -1) \rangle$

1,5

d) $E_1^{\perp} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{C}^3,\ \underbrace{\overline{(1, i, -1)}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{x - iy - z} = 0 \right\}$

1,5

$\langle (1, i, -1), A(x,y,z) \rangle = \langle \underbrace{A(1, i, -1)}_{(1, i, -1)}, (x,y,z) \rangle$

donc $A(x,y,z) \in E_1^{\perp} \Leftrightarrow (x,y,z) \in E_1^{\perp}$

$E_1^{\perp} = E_2 \oplus E_4$

e) $E_2 = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 1 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} = \langle (1, 0, 1) \rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) \rangle$

2 $E_4 = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -2 & i & 0 \\ -i & -1 & i \\ 0 & -i & -2 \end{pmatrix} = \langle (-1, 2i, 1) \rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2i, 1) \rangle$

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ i/\sqrt{3} & 0 & 2i/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \qquad {}^t\bar{U} A U = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 4 \end{pmatrix}$$

f) $A = U\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 4 \end{pmatrix}{}^t\bar{U} = \left(U\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \sqrt{2} & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix}{}^t\bar{U}\right)^2$

1,5 les vp de R sont $\pm 1, \pm\sqrt{2}, \pm 2$ ⇝ R est diagonalisable et les espaces propres de R sont espaces propres de A ⇝ $R = U\begin{pmatrix} \pm 1 & & 0 \\ & \pm\sqrt{2} & \\ 0 & & \pm 2 \end{pmatrix}{}^t\bar{U}$