Exercice 6 :

6.a) On fixe $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Soit $G \subset Aff(\mathbb{R}^n)$ le sous gp
$G = \{ f \in Aff(\mathbb{R}^n) \mid f(x_0) = x_0 \}$.

↳ sous gp : . $id \in G$. ✓

. $f, g \in G$: $g(f(x_0)) = g(x_0) = x_0$

$g \circ f \in G$. ✓

Isomorphisme $G \xrightarrow{\sim} GL(\mathbb{R}^n)$?

$f \longmapsto$?? A_f

f est de la forme $f(x) = Ax + b$

Q : Oui mais ... A_f est-il bien défini ?
↳ oui c'est la partie linéaire de f.

Soit $\Phi : f \in Aff(\mathbb{R}^n) \longmapsto A_f$ la partie linéaire

Morphisme ?

$f_1, f_2 \in Aff(\mathbb{R}^n)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\begin{cases} f_1(x) = A_1 x + b_1 \\ f_2(x) = A_2 x + b_2 \end{cases}$

$A_1, A_2 \in GL(\mathbb{R}^n)$
$b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n$.

$f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x))$

$$= f_1(A_2 x + b_2) = A_1(A_2 x + b_2) + b_1 .$$

$$= A_1 A_2 \cdot x + A_1 b_2 + b_1$$

Partie linéaire de $f_1 \circ f_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \Phi(f_1) \\ A_2 = \Phi(f_2) \end{array} \right.$$

$$A_1 A_2 = \boxed{\Phi(f_1 \circ f_2) = \Phi(f_1) \cdot \Phi(f_2)}$$

$$\Phi(id) = id .$$

Φ est un morphisme de groupes.

Ker Φ ? Fonct°s affines de la forme

$$f(x) = I \cdot x + b = x + b$$

i.e. les translations.

<u>Rappel</u> : $G = \{ f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n) \mid f(x_0) = x_0 \}$.

M.q. $\Phi|_G : G \longrightarrow GL(\mathbb{R}^n)$ est un isomorphisme.

$$f(x) = \Phi(f) \cdot x + b$$

Injectivité : $\forall f \in G, \ \Phi(f) = Id \Rightarrow f = Id$.

$$\underbrace{\operatorname{Ker} \Phi}_{\{\text{translations}\}} \cap G = \{ id \} .$$

$f \in \ker \Phi$, $\exists\, b \in \mathbb{R}^n$ tq
$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = x + b$.
$f \in G \iff f(x_0) = x_0$, d'où $x_0 + b = x_0$
$\Rightarrow b = 0$.
i.e. $f = id$.

Surjectivité ? Soit $A \in GL(\mathbb{R}^n)$. M.q $\exists f \in G$
tq $\Phi(f) = A$.

$f(x) = Ax + b$ $\longrightarrow$ à trouver tq $f \in G$.

$f \in G \iff f(x_0) = x_0$; $Ax_0 + b = x_0$
$b = x_0 - Ax_0 = (Id - A)x_0$.

Posons $f(x) = Ax + \underbrace{(I - A)x_0}_{\text{partie translation}}$.

$f \in Aff(\mathbb{R}^n)$, $\Phi(f) = A$ et
$f(x_0) = Ax_0 + x_0 - Ax_0 = x_0$
D'où $f \in G$: Φ est bien surjective

$f(x) = Ax + b$. (O est l'origine).

$= A(x - x_0) + Ax_0 + b$.

b. $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n) = \{ \text{translations} \}$ est le noyau de $\Phi : \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow GL(\mathbb{R}^n)$.

C'est un sous gp, isomorphe au groupe additif de $\mathbb{R}^n$.

$$\tau : b \in \mathbb{R}^n \longmapsto t_b \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n).$$

(bijectif par déf. de $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$).

$$\tau(b_1 + b_2) = t_{b_1} \circ t_{b_2}.$$

$\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ est abélien.

Qui est $A t_b A^{-1}$ dans le gp affine ?

$x \in \mathbb{R}^n$, $A t_b A^{-1}(x) = A(t_b(A^{-1}(x)))$

$$= A(A^{-1}x + b) = x + Ab.$$

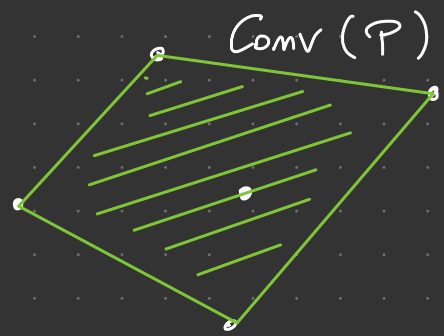
$$= t_{Ab}(x)$$

$$\boxed{A t_b A^{-1} = t_{Ab}}$$

, $\underset{GL_n}{A}\ \underset{\in \mathbb{R}^n}{b} \in \mathbb{R}^n$

$\hookrightarrow$ $A \circ t_b \circ A^{-1}$ est la translation de vecteur $A.b$.

c.



P = ensemble fini de points.

$G_P = \{ \phi \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ tq $\underline{\phi(P) = P} \}$.

ϕ fixe $\{A_1, \dots, A_n\}$ dans leur ensemble.

$$\mathrm{Conv}(P) = \bigcap_{\substack{\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n \text{ convexe} \\ P \subset \mathcal{E}}} \mathcal{E}$$

= intersection de toutes les parties convexes de $\mathbb{R}^n$ contenant P.

$\phi \in G_P$. Mq. $\phi(\mathrm{Conv}(P)) \subset \mathrm{Conv}(P)$.

ϕ affine $\Rightarrow$ ϕ envoie segment sur segment.

$\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$.

x', y' $\quad x' = \phi(x)$, $y' = \phi(y)$.

D'où : $\forall \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ convexe, $\phi(\mathcal{E})$ est convexe.

en effet, $\forall x, y \in \mathcal{E}$, $[\phi(x), \phi(y)] = \phi([x, y])$

$\mathcal{E}$ convexe $\Rightarrow [x, y] \subset \mathcal{E}$.

$\Rightarrow \phi([x, y]) \subset \phi(\mathcal{E})$: $\phi(\mathcal{E})$ conv

$\phi \in G_{\mathcal{P}}$, $\quad \phi(\mathrm{Conv}(P)) = \phi\left(\bigcap_{\substack{\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n \text{ convexe} \\ \mathcal{P} \subset \mathcal{C}}} \mathcal{C} \right)$

$$= \bigcap_{\substack{\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n \text{ convexe} \\ \mathcal{P} \subset \mathcal{C}}} \underbrace{\phi(\mathcal{C})}_{(= t_{\bar{e}})} \subset \mathrm{Conv}(P).$$

Comme $\phi(P) = \mathcal{P}$, $\mathcal{P} \subset \phi(\mathcal{C})$, qui est convexe

L'isobarycentre de $\mathcal{P}$ est l'unique $G \in \mathbb{R}^n$ tq

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}, \quad \text{si } \mathcal{P} = \{A_1, \dots, A_n\}.$$

On applique $\vec{\phi}$ la partie linéaire de ϕ :

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{\phi}(\overrightarrow{GA_i}) = \vec{0}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\phi(G)\phi(A_i)} = \vec{0}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\phi(G)\, A_i} = \vec{0}; \quad \text{car } \phi \text{ permute } \{A_1, \dots, A_n\}.$$

$\phi(G) = G.$

Il reste à vérifier que G_P se plonge dans le groupe des permutations de P, i.e. construire un morphisme <u>injectif</u> $f : G_P \longrightarrow \mathfrak{S}_P$.

Pour $\phi \in G_P$, prenons $f(\phi) = \phi|_P$. C'est bien une application $P \to P$ car $\phi(P) = P$, et $\phi|_P$ est bijective car injective (car ϕ est injective sur tout $\mathbb{R}^n$) et P est fini. Il est immédiat que f est un morphisme de groupes. Reste à voir l'injectivité, ie $\operatorname{Ker} f = \{id\}$: Soit $\phi \in G_P$ tq $\phi|_P = id_P$. Notons $P = \{x_0, \dots, x_n\}$, c'est un repère affine, et $\forall i \geq 1$, $\vec{\phi}(\overrightarrow{x_0x_i}) = \overrightarrow{x_0x_i}$. D'où $\vec{\phi} = id$, et comme $\phi(x_0) = x_0$, $\phi = id$.

6d) <u>Cas du triangle dans $\mathbb{R}^2$</u>

$\phi \in G_\Delta$, ϕ fixe le centre de gravité O du triangle.

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \\ \|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OB}\| = \|\overrightarrow{OC}\| \end{cases} \quad \underline{\text{et}} \quad \phi(\{A, B, C\}) = \{A, B, C\}.$$

M.q. $\vec{\phi}$ est orthogonale.

ϕ permute les sommets A, B et C. On distingue trois cas :

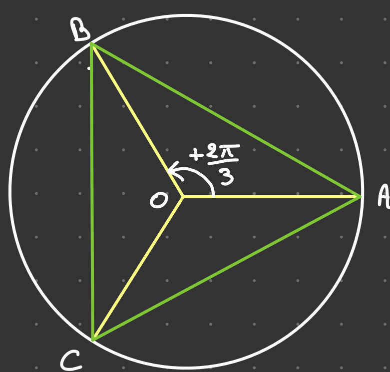
1) ϕ fixe chaque sommet (id)
2) ϕ fixe exactement un sommet (transposition)
3) ϕ ne fixe aucun sommet (cycle)

Cas 1 : Φ fixe individuellement les points d'un repère affine.
$\Rightarrow \Phi = id$, en part., $\vec{\Phi} = id$ est orthogonale.

Cas 2 : Disons $\Phi(A) = A$, $\Phi(B) = C$ et $\Phi(C) = B$.
Alors, $\vec{\Phi}(\vec{CB}) = \vec{\Phi}(\vec{OB} - \vec{OC}) = \overrightarrow{O\Phi(B)} - \overrightarrow{O\Phi(C)}$
$= \vec{OC} - \vec{OB} = \vec{BC}$

Comme ABC est équilatéral, $\vec{BC} \perp \vec{OA}$. Et donc, si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une b.o.n. tq $\vec{OA} \in \mathbb{R}.\vec{u}$ et $\vec{BC} \in \mathbb{R}\vec{v}$, alors $\underset{(\vec{u},\vec{v})}{\mathrm{Mat}} \vec{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: c'est la réflexion orthogonale selon la droite vectorielle $\mathbb{R}.\vec{OA}$.

Cas 3 : Disons $\Phi(A) = B$, $\Phi(B) = C$ et $\Phi(C) = A$.
et que l'angle orienté $(\vec{OA}, \vec{OB})$ vaut $\frac{2\pi}{3}$.



Soit R la rotation vectorielle d'angle $\frac{2\pi}{3}$ dans (E, O).

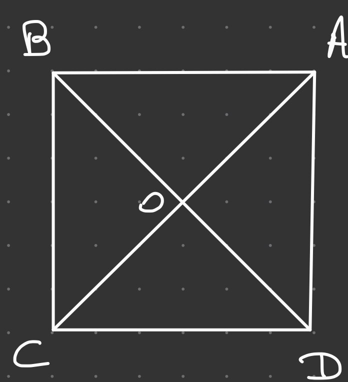
Alors $R^{-1} \circ \vec{\Phi}$ fixe les vecteurs $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ et $\vec{OC}$.
D'où $R^{-1} \circ \vec{\Phi} = id$ et $\vec{\Phi} = R$ est bien orthogonale.

On sait que G_Δ se plonge dans σ_Δ. Reste à voir que l'on réalise toutes les permutations de Δ ainsi.
$|\sigma_\Delta| = 6$, on les liste :

- id_Δ : réalisée avec $\Phi = id$

- transposition τ_{BC} : réalisée avec Φ = réflexion orthogonale d'axe (OA).
- ____ τ_{AC} : ____ ____ (OB).
- ____ τ_{AB} : ____ ____ (OC).
- cycle $(A\,B\,C)$: réalisé avec Φ = rotation de centre O et d'angle $2\pi/3$.
- cycle $(A\,C\,B)$: ____ ____ $4\pi/3$.

6e) De nouveau, tout élément $\Phi \in G_\square$ fixe O d'après 6.c)



On note que $G_\square$ contient les rotations de centre O et d'angle multiple entier de $\frac{\pi}{2}$, et que tout sommet peut être envoyé sur n'importe quel autre sommet par une telle rotation.

Soit $\Phi \in G_\square$ quelconque. Comme $\Phi(A)$ est dans $\{A, B, C, D\}$, il existe $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ tq

si R = rotation de centre O et d'angle $n\frac{\pi}{4}$, alors

$$R(A) = \Phi(A).$$

Ainsi, $\underbrace{R^{-1} \circ \phi}_{= \phi_A} \in G_{\square}$ et <u>fixe A</u> : $\phi_A(A) = A$.

D'où $\overrightarrow{\phi_A}(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA}$, et donc

$$\phi_A(C) = \phi_A(O - \overrightarrow{OA}) = O - \overrightarrow{OA} = C.$$

ϕ_A fixe donc aussi C, et $\phi_A(\{B,D\}) = \{B,D\}$.

<u>cas 1</u> : $\phi_A(B) = B$ et $\phi_A(D) = D$.

Alors ϕ_A fixe tous les sommets du carré

$\Rightarrow \phi_A = id$ et donc $\underline{\phi = R}$.

<u>cas 2</u> : $\phi_A(B) = D$ et $\phi_A(D) = B$.

Alors $\begin{cases} \overrightarrow{\phi_A}(\overrightarrow{BD}) = -\overrightarrow{BD} \\ \overrightarrow{\phi_A}(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AC} \end{cases}$

Ce qui signifie que $\overrightarrow{\phi_A} = \overrightarrow{S_{AC}}$ la réflexion orthogonale par rapport à la droite $\mathbb{R}.\overrightarrow{AC}$.

D'où $\overrightarrow{\phi} = \overrightarrow{R} \circ \overrightarrow{S_{AC}}$: c'est bien un élt du groupe orthogonal.

Par conséquent, tout $\phi \in G_{\square}$ est une <u>isométrie affine</u> du plan : $\forall P, Q$, $d(\phi(P), \phi(Q)) = d(P,Q)$

($d(P, Q)$ désigne la distance euclidienne entre les points P et Q).

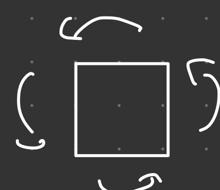
On, $d(AC) = \sqrt{2}\,.\,d(AB)$. Il n'y a donc pas d'élément $\phi \in G_\square$ tel que $\phi(A) = A$ et $\phi(B) = C$.

$\rightsquigarrow$ la transposition qui échange B et C n'est donc pas dans l'image du plongement

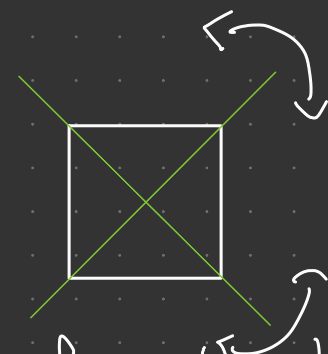
$$G_\square \hookrightarrow \mathrm{Bij}(\square).$$

Listons 8 éléments de $G_\square$:

- id
- $R_{\pi/2}$, R_π, $R_{3\pi/2}$



- Réflexions d'axe (AC) ou (BD)



- Réflexions d'axes passant par les milieux des côtés :