3n

$\mathbb{R}_3[X]$

a) $V = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(0)=P(1)=0\} \subset \mathbb{R}_3[X]$, contient 0, est stable par + et par $\cdot x$ – donc sev de $\mathbb{R}_3[X]$ ou encore ~~noyau~~ Ker $(P \mapsto (P(0), P(1)))$

1.5 $P = a_0 + \dots + a_3X^3$ $\qquad P(0)=0 \Leftrightarrow a_0 = 0$

$P(1) = 0 \Leftrightarrow a_0 + \dots + a_3 = 0$

ensemble $a_0 = 0$ et $a_1 + a_2 + a_3 = 0$

b) $W = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P'(0) = P'(1) = 0\}$ est le noyau de $\mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^2$,

1.5 $P \mapsto (P'(0), P'(1))$ qui est linéaire, donc sev

$P = a_0 + \dots + a_3X^3$ alors $P' = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2$

$P'(0) = a_1$ et $P'(1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3$

$P \in W \Leftrightarrow a_1 = 0$ et $2a_2 + 3a_3 = 0$

c) $V \cap W = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ X^2(X-1)^2 \text{ divise } P\} = \{0\}$

ou encore avec les conditions sur les coef. :

2 $a_0 = a_1 = 0,\ a_2 + a_3 = 0,\ 2a_2 + 3a_3 = 0 \leadsto a_2 = a_3 = 0$ car $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ inversible

$\dim V + W = \dim V + \dim W - \underbrace{\dim(V \cap W)}_{0}$

$V \xleftarrow{\simeq} \mathbb{R}^2$ $\qquad$ donc $\dim V = 2$. $\qquad$ Ou encore ~~dim~~ $\mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^2$

$(0, a_1, a_2, -a_1 - a_2) \leftarrow\!\shortmid (a_1, a_2)$ $\qquad P \mapsto (P(0), P(1))$

est surjective : $a(1-X) + bX$

donc $\dim V = \dim \mathbb{R}_3[X] - \dim \mathbb{R}^2 = 2$

de même $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} W$ $\qquad$ donc $\dim W = 2$

$(a_0, a_2) \mapsto$ ~~$a_0 a_1$~~ $a_0 + a_2\left(X^2 + \frac{2}{3}X^3\right)$

$\leadsto \dim V + W = 4$ $\qquad$ donc $V + W = \mathbb{R}_3[X]$

d $\phi_1, \dots, \phi_4$

$$V = \ker \phi_1 \cap \ker \phi_2 = \mathrm{Vect}(\phi_1, \phi_2)^{\perp}$$
$$W = \ker \phi_3 \cap \ker \phi_4 = \mathrm{Vect}(\phi_3, \phi_4)^{\perp}$$

~~et~~ Mais alors $V^{\perp} + W^{\perp} = \underbrace{\mathrm{Vect}(\phi_1, \phi_2)^{\perp\perp}}_{\mathrm{Vect}(\phi_1, \phi_2)} + \mathrm{Vect}(\phi_3, \phi_4)^{\perp\perp} = \mathrm{Vect}(\phi_1, \dots, \phi_4)$

$$= (V \cap W)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = \mathbb{R}_3[X]^* \text{ entier}$$

Plus simplement $\mathrm{Vect}(\phi_1, \dots, \phi_4)^{\perp} = V \cap W = \{0\}$ donc $\dim \mathrm{Vect}(\phi_1, \dots, \phi_4) = 4$

donc $\mathrm{Vect}(\phi_1, \dots, \phi_4) = \mathbb{R}_3[X]^*$ et $(\phi_1, \dots, \phi_4)$ est une base

e P_1 tq $\underbrace{P_1(0) = 1, \quad P_1'(0) = P_1(1) = P_1'(1) = 0}$

$$P_1 = (X-1)^2 Q \qquad \Big| \; \begin{array}{l} d^\circ Q = 1 \\ Q(0) = 1 \end{array}$$

$$P_1' = 2(X-1)Q + (X-1)^2 Q' \rightsquigarrow 2Q(0) + Q'(0) = 0$$

$$Q = a - 2aX$$
$$a = 1$$

$$P_1 = (X-1)^2(1-2X) = (1-2X+X^2)(1-2X)$$
$$= 1 - 4X + 5X^2 - 2X^3$$

etc.

Ou bien $\mathrm{Mat}(P_1 - P_4) = (a_{ij})$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} (a_{ij}) = I_4$

$L_2 - L_1 \to L_2$ ~~$L_3 - L_2 \to L_3$~~ $L_4 - L_3 \to L_4$ | $L_2 \leftrightarrow L_3$ | $L_3 - L_2 \to L_3$ ~~$L_4 - L_2 \to L_4$~~ | $L_4 - 2L_3 \to L_4$ | $L_3 - L_4 \to L_3$

$$I_4 \; \Big| \; \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \Big| \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{matrix} \quad \Big| \quad \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{array} \quad \rightsquigarrow$$

b $U = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(0) = P(1) \text{ et } P'(0) = P'(1)\}$

$P = a_0 + \dots + a_3 X^3$ $\quad P \in U \Leftrightarrow a_0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$

et

$a_1 = -a_1 - 2a_2 - 3a_3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ 2(a_1 + a_2) + 3a_3 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow a_1 + a_2 = 0$ et $a_3 = 0$ (faire $L_2 - 2L_1$, etc.)

$\rightsquigarrow U = \mathrm{Vect}(1, X - X^2)$ manifestement un sev de $\mathbb{R}_3[X]$

b $U^\perp = \{\varphi \in \mathbb{R}_3[X]^*,\ \varphi|_U = 0\}$

φ de matrice $(a\ b\ c\ d)$ relativt à la base canonique $(X^i)_{0 \leq i \leq 3}$ de $\mathbb{R}_3[X]$

$$\varphi|_U = 0 \Leftrightarrow (a\ b\ c\ d)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 0 \text{ et } (a\ b\ c\ d)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow a = 0$ et $b = c$

$$\text{donc } U^\perp = \mathrm{Vect}\Big(\underbrace{a_0 + \dots + a_3X^3 \mapsto a_1 + a_2}_{\text{de matrice } (0\ 1\ 1\ 0)},\ \underbrace{a_0 + \dots + a_3X^3 \mapsto a_3}_{\text{de matrice } (0\ 0\ 0\ 1)}\Big)$$

$$\Big[= \mathrm{Vect}\Big(P \mapsto P'(0) + \tfrac{1}{2}P''(0),\ P \mapsto \tfrac{1}{3}P'''(0)\Big) \Big]$$

Autre réponse : en utilisant la base (φ_i) de la question (c) :

$P = \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_4 P_4$: $\quad P \in U \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ et $\alpha_3 = -\alpha_4$

$\Leftrightarrow (\varphi_1 - \varphi_2)(P) = 0$ et $(\varphi_3 + \varphi_4)(P) = 0$

donc $U = \mathrm{Vect}(\varphi_1 - \varphi_2, \varphi_3 + \varphi_4)^\perp$

mais alors $U^\perp = \mathrm{Vect}(\varphi_1 - \varphi_2, \varphi_3 + \varphi_4)$