Fin exercice 5 (Quaternions).

$\mathbb{H} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$

Sous-espace réel de dim. 4.

$= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathbb{1}, I, J, K)$

$\mathbb{H}$ est stable par produit matriciel.

– conjugué

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -\bar{\beta}_1 \\ \beta_1 & \bar{\alpha}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 & -\bar{\beta}_2 \\ \beta_2 & \bar{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 - \bar{\beta}_1\beta_2 & -\alpha_1\bar{\beta}_2 - \bar{\beta}_1\bar{\alpha}_2 \\ \beta_1\alpha_2 + \bar{\alpha}_1\beta_2 & -\beta_1\bar{\beta}_2 + \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$$

Conjugué

ms $\mathbb{H}$ = sous-$\mathbb{R}$-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

La formule de l'inverse avec la comatrice nous donne :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, (\alpha, \beta) \neq (0,0), \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$$

Tout élément non nul de $\mathbb{H}$ est inversible, et $\mathbb{H}$ est stable par passage à l'inverse $\rightarrow$ $\mathbb{H}$ corps gauche.

Pts communs et différences entre $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$:

$\mathbb{R} \xrightarrow{\text{rajout de } i} \mathbb{C}$, $i^2 = -1$ produit commutatif

$\mathbb{R} \xrightarrow{\text{rajout}} \mathbb{H}$ produit non-commutatif, ex : $IJ = -JI$.

de I, J, K, $I^2 = J^2 = K^2 = -\mathbb{1}$, $IJK = -\mathbb{1}$

<u>Conjugaison</u> : $z = x + iy \in \mathbb{C} \mapsto \bar{z} := x - iy \in \mathbb{C}$.

$q = a + Ib + Jc + Kd \mapsto \bar{q} := a - Ib - Jc - Kd$, $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$

$\mathbb{R} = \{ z \in \mathbb{C} : z = \overline{z} \}$, $\mathbb{R}.\mathbb{1} = \{ q \in \mathbb{H}, q = \overline{q} \}$.

$\forall z \in \mathbb{C}$, $z\overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$, $z = x + iy$.

$\forall q \in \mathbb{H}$, $q\overline{q} = N(q) := a^2 + b^2 + c^2 + d^2$,

$$q = a\mathbb{1} + bI + cJ + dK.$$

<u>NB</u> : En voyant $q = \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$, alors

$$\overline{q} = {}^t\mathrm{Com}\begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \text{ et } N(q) = \det\begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}.$$

La formule $q\overline{q} = N(q)$ correspond à $A\,{}^t\mathrm{Com}\,A = \det A . I_n$.

On voit de nouveau $\forall q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$, q admet un inverse, à savoir $\frac{1}{N(q)} . \overline{q}$, comme dans $\mathbb{C}$:

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} . \overline{z}.$$

Le calcul $q\overline{q} = N(q)$ se déduit des relations entre I, J et K (notés ici i, j, k) : $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$ et $ki = -ik = j$. On calcule alors :

$$\begin{aligned} q\overline{q} &= (a + ib + jc + kd)(a - ib - jc - kd) \\ &= a^2 - \cancel{iab} - \cancel{jac} - \cancel{kad} \\ &\quad + \cancel{iab} + b^2 - \cancel{bck} + \cancel{bdj} \\ &\quad + \cancel{jac} + \cancel{bck} + c^2 - \cancel{cdi} \\ &\quad + \cancel{adk} - \cancel{bdj} + \cancel{cdi} + d^2. \end{aligned}$$

Différence notable avec $\mathbb{C}$: $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2} \cdot \overline{q_1}$.

ex : $\overline{ij} = \overline{k} = -k = ji = \overline{j}\,\overline{i}$.

5.f. Via la présentation $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$, $SU(2)$ s'identifie aux quaternions de norme $N(q) = 1$.

Pour $u \in SU(2)$, on déf $C_u : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ par

$$\forall q \in \mathbb{H}, \quad C_u(q) = uqu^{-1} = uq\overline{u}$$

1) $C_u \in GL(\mathbb{H}) \simeq GL_4(\mathbb{R})$.

a) $\mathbb{R}$-linéarité (en q). $\lambda \in \mathbb{R}$, $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$.

$$C_u(q_1 + \lambda q_2) = u(q_1 + \lambda q_2)u^{-1}$$

$$= (uq_1 + \lambda u q_2)u^{-1} = uq_1u^{-1} + \lambda u q_2 u^{-1}$$

$$= C_u(q_1) + \lambda C_u(q_2)$$

Rq : $u \times (\lambda q) = \lambda \times (u \times q)$.

(penser à u et q comme des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$)

($\mathbb{R} \subset \mathbb{H}$ est central.)

Si on note $\varphi : SU(2) \to \mathcal{L}(\mathbb{H})$, $u \mapsto C_u$, montrons

que $\varphi(id) \overset{\text{Clair}}{=} id_{\mathbb{H}}$ et $\forall u, v \in SU(2)$, $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$.

$\forall q \in \mathbb{H}$, $\forall u, v \in SU(2)$,

$$C_u \circ C_v(q) = C_u(vqv^{-1}) = u(vqv^{-1})u^{-1}$$
$$= (uv)\,q\,(v^{-1}u^{-1}) = (uv)\,q\,(uv)^{-1}$$
$$= C_{uv}(q).$$

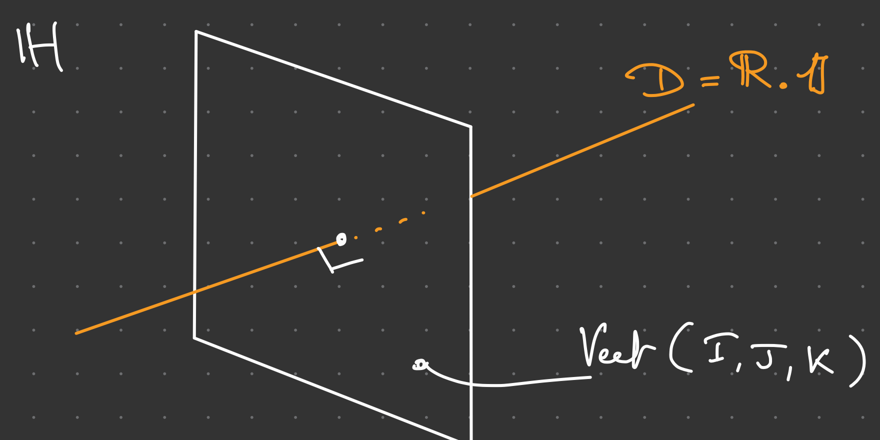
D'où $C_u \circ C_v = C_{uv}$ comme annoncé.

Conséquence : $\forall u \in SU(2)$, $C_u \in GL(\mathbb{H})$.
En effet, $C_u \circ C_{u^{-1}} = C_{id} = id_{\mathbb{H}}$. Ainsi C_u est inversible, d'inverse $C_{u^{-1}}$.

Ainsi, $\varphi : \begin{array}{ccc} SU(2) & \longrightarrow & GL(\mathbb{H}) \\ u & \longmapsto & C_u \end{array}$ est un morphisme de groupes.

5g (*) $\mathbb{H}$ a une norme euclidienne N définie ci-dessus.
C'est donc un espace euclidien de dim. 4.
Notons $D = \mathbb{R}.\mathbb{1} \subset \mathbb{H}$ la droite réelle

Alors $\mathrm{Vect}(I, J, K) = D^{\perp}$ pour cette structure euclid.



Alors $\forall u \in SU(2)$, $\quad C_u(D) = D$ car $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,
$\lambda . \mathbb{1}$ commute à tous $\mathbb{H}$, et donc

$$C_u(\lambda . \mathbb{1}) = u . (\lambda . \mathbb{1}.) u^{-1} = \lambda . \mathbb{1}.$$

- Notons que C_u préserve N :

$$\forall q \in \mathbb{H}, \quad N(C_u(q)) = N(u q \bar{u})$$
$$= (u q \bar{u}) . (u \bar{q} \bar{u}) = u \underbrace{q\bar{q}}_{\in D} \bar{u} = q\bar{q} = N(q).$$

- Par conséquent, C_u préserve $D^{\perp} = \mathrm{Vect}(I, J, K)$.

Rq : Ceci peut se voir directement en notant que

$$\mathrm{Vect}(I, J, K) = \{ q \in \mathbb{H} \ : \ \bar{q} = -q \}.$$

D'où $\forall q \in \mathrm{Vect}(I, J, K)$, $\forall u \in SU(2)$,

$$\overline{C_u(q)} = \overline{u q \bar{u}} = u \bar{q} \bar{u} = - u q \bar{u} = - C_u(q)$$

montrant bien que $C_u(q) \in \underbrace{\mathrm{Vect}(I, J, K)}_{\text{notons le } E}$.

De +, $C_u|_E$ préserve la restriction de la norme euclidienne N.

(NB : Le produit scalaire associé à N est :

$$(q_1, q_2) \longmapsto \langle q_1, q_2 \rangle = \frac{1}{2}(q_1 \bar{q}_2 + q_2 \bar{q}_1))$$

Ainsi, $\Psi : u \longmapsto C_u|_E \in O(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est à valeurs dans un espace vec. de dim 3.

Comme $SU(2) \simeq \mathbb{S}^3$ est connexe, et Ψ continue, $\Psi(SU(2))$ est connexe, donc contenu dans $SO(E)$
$\simeq SO(3)$.

$$\operatorname{Ker}\Psi = \{ u \in SU(2) : \forall q \in \mathrm{Vect}(I,J,K),\ \underbrace{C_u(q) = q}_{\iff uq = qu} \}.$$

Écrivons $u = a\mathbb{1} + bI + cJ + dK$.

$$\left.\begin{aligned} uI &= aI - b\mathbb{1} - cK + dJ \\ = Iu &= aI - b + cK - dJ \end{aligned}\right) \Rightarrow c = d = 0$$

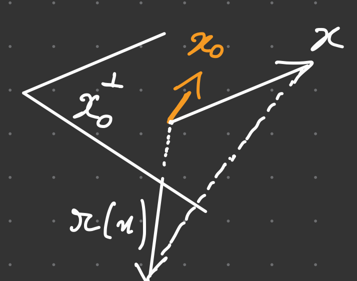
$$\left.\begin{aligned} uJ &= aJ + bK - c\mathbb{1} - dI \\ = Ju &= aJ - bK - c\mathbb{1} + dI \end{aligned}\right) \Rightarrow b = 0.$$

D'où $u = a \cdot \mathbb{1}$, et $u \in SU(2) \Rightarrow a^2 = 1$.
Finalement, $\operatorname{Ker}\Psi = \{\pm \mathbb{1}\}$.

Il reste à montrer la <u>surjectivité</u> de Ψ.
On va utiliser qu'en général, $O(n, \mathbb{R})$ est engendré par les réflexions orthogonales. Ceci implique en particulier que tout $f \in SO(n)$ est produit d'un nombre <u>pair</u> de réflexions.

<u>Rappel</u> : la réflexion $\perp$ par rapport à $x_0 \in E$ normé est donnée par :

$$\boxed{r(x) = x - 2\langle x, x_0 \rangle x_0}$$



Prenons $q_0 \in E = \mathrm{Vect}(I, J, K)$, normé ($\bar{q}_0 q_0 = 1$).
Soit r_0 la réf. $\perp$ selon q_0. Comme le produit scalaire de $\mathbb{H}$ s'écrit $\frac{1}{2}(\bar{q}_1 q_2 + \bar{q}_2 q_1)$, on a :

$$\forall q \in E, \quad r_0(q) = q - (\bar{q} q_0 + \bar{q}_0 q) q_0$$
$$= q + q q_0^2 + q_0 q q_0$$
$$= - q_0 q q_0^{-1}.$$

car $q, q_0 \in E \Rightarrow \bar{q} = -q$ et $\bar{q}_0 = -q_0$; $q_0 = -q_0^{-1}$.

Ainsi, $\boxed{C_{q_0}|_E = - r_0}$: l'opposé d'une réflexion est bien dans l'image de Ψ.

Soit maintenant $f \in SO(3)$. Alors f est produit d'au plus trois $\underbrace{\text{réflexions}}_{\det = -1}$ (comme tout élt de $O(3)$).

$\Rightarrow f = id$ ou produit de deux réflexions.
(exercice : l'écrire explicitement)

Si $f \neq id$, alors $f = r_1 r_2 = \underbrace{(-r_1)}_{\in \mathrm{Im}\,\Psi}\underbrace{(-r_2)}_{\in \mathrm{Im}\,\Psi}$, où r_1, r_2 sont deux réflexions.

Ainsi tout $f \in SO(3) = SO(E)$ est dans l'image de Ψ.
CCL : $\Psi : SU(2) \longrightarrow SO(3)$ est bien surjective, de noyau $\{\pm id\}$. C'est le "revêtement spinoriel" de $SO(3)$.

Ex 8 : On considère une forme quadratique hermitienne sur $\mathbb{C}^3$:

$$q(x_1, x_2, x_3) = q(x), \quad \text{où } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3.$$

anti lin.

$$s(x, y)$$

x_1, x_2, x_3 ; y_1, y_2, y_3

$q \rightsquigarrow s$
polarisation

$|x_i|^2 \rightsquigarrow \overline{x_i}\, y_i$

Forme sesquilinéaire, à symétrie hermitienne.

$$s(y, x) = \overline{s(x, y)}$$

→ Les termes en $|x_i|^2 = \overline{x_i}\, x_i$ se polarisent en $\overline{x_i}\, y_i$.
Il faut chercher les autres en combinant $\overline{x_i}\, y_j$, et vérifier la symétrie hermitienne.

On regarde le cas de :

$$q(x) = |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 - i\,\overline{x_1}\, x_2 + i\, x_1 \overline{x_2} + i\,\overline{x_1}\, x_3 - i\, x_1 \overline{x_3}.$$

Sous-cas : $q'(x) = \cancel{-}i\,\overline{x_1}\, x_2 + (i\, x_1)\overline{x_2}$ $\in \mathbb{R}$ (égal à son conjugué)

$$= \underbrace{\overline{i x_1}}_{z} . x_2 + \underbrace{i x_1 . \overline{x_2}}_{\overline{z}}$$

Sous-sous-cas : $q''(x) = \overline{x_1}\, x_2 + x_1 \overline{x_2}$

$$s''(x, y) = \overline{x_1}\, y_2 + y_1 \overline{x_2}$$

$s''(y, x) =$
$= \overline{i y_1 . x_2 + i x_1 \overline{y_2}}$
$= s''(x, y)$: OK

$$s'(x, y) = \overline{i x_1}\, y_2 + i y_1 \overline{x_2}$$

$\hookrightarrow s(x,y) = \overline{x_1} y_1 + \overline{x_2} y_2 + \overline{x_3} y_3 - i\,\overline{x_1} y_2 + i\,\overline{x_2} y_1$
$+ i\,\overline{x_1} y_3 - i\,\overline{x_3} y_1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ i & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = A.$$

A est la matrice de q.

<u>Algorithme de Gauss pour le cas hermitien :</u>

$q(x) = |x_1|^2 + |x_1|^2 + |x_3|^2 - i\,\overline{x_1} x_2 + i\,x_1\overline{x_2} + i\,\overline{x_1} x_3 - i\,x_1\overline{x_3}.$

$$|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + \bar{a}b + a\bar{b}$$

$q(x) = \overbrace{|x_1|^2 + \overline{ix_1}\cdot x_2 + ix_1\overline{x_2} + |x_2|^2} + |x_3|^2 + i\overline{x_1}x_3 - ix_1\overline{x_3}$

$= |ix_1 + x_2|^2 + |x_3|^2 + i\,\overline{x_1}x_3 - i\,x_1\overline{x_3} + |x_1|^2 - |x_1|^2$

$= {}^{+}|ix_1 + x_2|^2 + {}^{+}|ix_3 + x_1|^2 - |x_1|^2.$

q est de signature (2, 1). Vérif. via les vap de A :

$$\begin{vmatrix} 1-X & -i & i \\ i & 1-X & 0 \\ -i & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^3 - 2(1-X)$$

$$= (1-X)\left[(1-X)^2 - 2\right]$$

$$= \underset{\substack{\downarrow\\ 1\\ >0}}{(1-x)}\Big(\underset{\substack{\downarrow\\ 1+\sqrt{2}\\ >0}}{(1-x+\sqrt{2})}\underset{\substack{\downarrow\\ 1-\sqrt{2}\\ <0}}{(1-x-\sqrt{2})}\Big)$$

On retrouve bien la signature $(2,1)$ de q.