f3 ex 4 $\quad H = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique

On observe $\dfrac{1}{i+j-1} = \displaystyle\int_0^1 t^{i+j-2}\,dt = \langle X^{i-1}, X^{j-1}\rangle$

où $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$: cf f2 ex3 a / f1 ex4

[cours] Soit $H\in M_n(\mathbb{R})$ symétrique. On a :

les valeurs propres de H sont >0 (On sait qu'elles sont toutes réelles)

$\Updownarrow$

la forme bilinéaire de matrice H est un produit scalaire

Donc ici H a toutes ses valeurs propres >0

On donne maintenant une preuve directe du fait que les valeurs propres de H sont strict^t positives :

Soit λ valeur propre (réelle) de H et $(x_1,\dots,x_n)$ un vecteur propre non nul pour λ

On forme la fonction polynomiale $f(t) = \sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}$.

On observe : $\displaystyle\int_0^1 f(t)^2\,dt = \int_0^1 \Big(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}\Big)^2 dt = \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i x_j \int_0^1 t^{i-1}t^{j-1}\,dt$

$$= \sum_{1\leq i,j\leq n} h_{i,j}\, x_i x_j$$

$$= {}^t\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} H \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \lambda \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$ puisque $(x_1,\dots,x_n)$ est vecteur propre de H pour λ

$$= \lambda\Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)$$

D'autre part f^2 est continue sur $[0,1]$, positive et n'est pas identiquement nulle sur $[0,1]$ car le polynôme $\sum_{i=1}^n x_i X^{i-1}$ est non nul donc n'a qu'un nombre fini de racines.

Donc $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,dt > 0$. Comme $\sum_{i=1}^n x_i^2$ est lui même >0, on en déduit $\lambda > 0$