Feuille 4.

Ex 1. 1.a. Non-dégénérée $\overset{?}{\not\Rightarrow}$ anisotrope.

FAUX : Ctre ex. Sur $\mathbb{R}^2$, $q(x) = x_1^2 - x_2^2$

Elle est non dégénérée, car sa matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$.

Pourtant, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est tq $q\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

(et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).

1.b. Anisotrope $\overset{?}{\Rightarrow}$ Non-dégénérée

VRAI : Preuve. Par contraposée, si q est dégénérée, si A est sa matrice dans la b.c., i.e.

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \quad q(v) = {}^t v A v$$

alors $A \notin GL_n(\mathbb{R})$ (par déf). D'où l'existence de $v \neq 0$ tq $Av = 0$, $\Rightarrow q(v) = {}^t v A v = 0$.

Rappel : Si $(e_1, \dots, e_n)$ est la b.c.,

$$A = (a_{ij}), \quad \text{alors } a_{ij} = b(e_i, e_j)$$

où b est la forme polaire de q.

i.e. la forme bil. sym tq $q(v) = b(v, v)$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$.

Rk : On parle de "Ker q" : si b est sa forme polaire

$$\operatorname{Ker} q = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in \mathbb{R}^n, \ b(x, y) = 0 \}$$

$= (\mathbb{R}^n)^\perp$.

q est non dégénérée ssi$_{\text{déf}}$ $\operatorname{Ker} q = \{0\}$.

1.c. (q est déf > 0 ou déf < 0) $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ q Anisotrope.

$\boxed{\Rightarrow}$: Suit de la déf.

$\boxed{\Leftarrow}$: Si q est anisotrope, alors elle est non dégénérée.

Il y a $n+1$ signatures possibles :

$\underbrace{(n, 0)}_{\text{déf.} > 0}, (n-1, 1), (n-2, 2), \ldots, (1, n-1), \underbrace{(0, n)}_{\text{déf} < 0}$.

(p, q)

p : # de vap > 0 ; q : # vap < 0

il y a des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans lesquelles

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2$$

$$(n = p + q)$$

$\leadsto$ le vecteur de coordonnées $(1, 0, \ldots, 0, 1)$ est isotrope, dès que $p > 0$ et $q > 0$.

Ainsi, si $(p, q) \neq (n, 0)$ ou $(0, n)$, q admet un vecteur isotrope non nul.

Donc, q anisotrope $\Rightarrow$ signature $\underbrace{(n, 0)}_{\text{déf} > 0}$ ou $\underbrace{(0, n)}_{\text{déf} < 0}$.

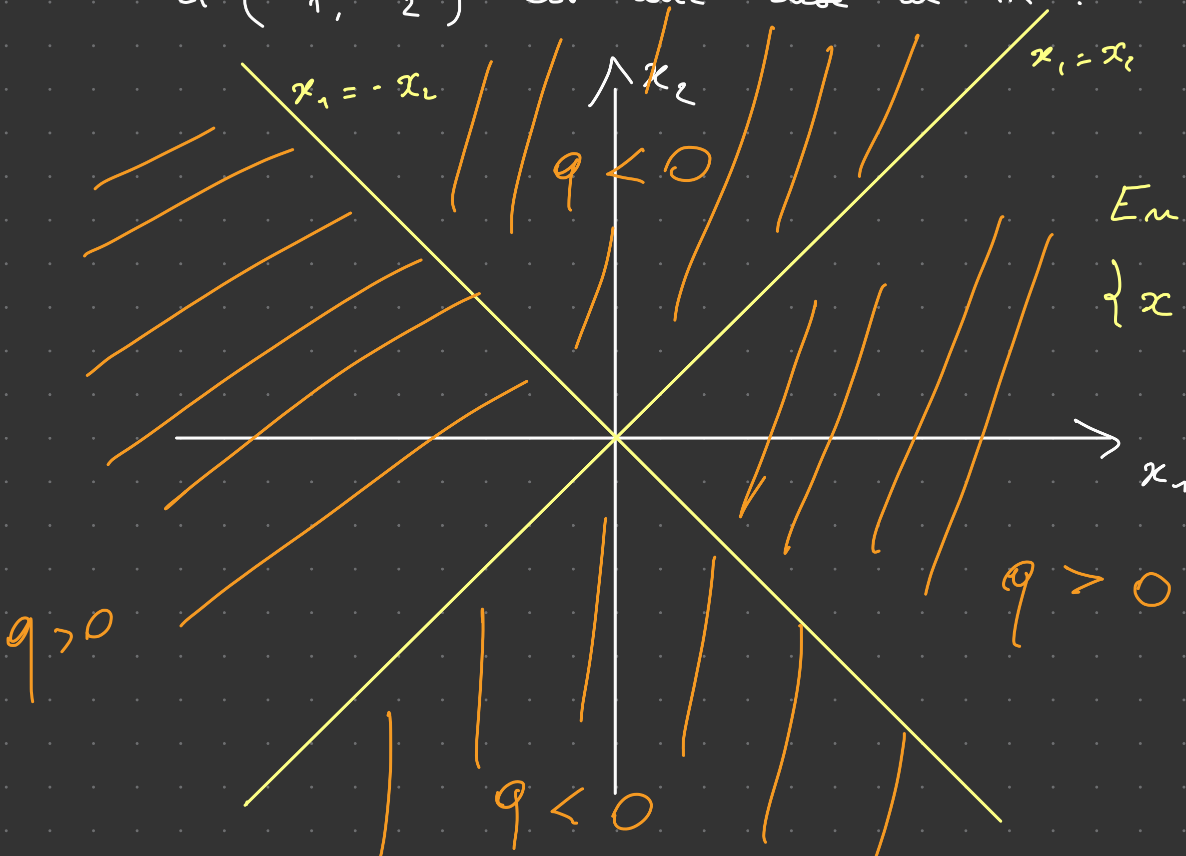
1.d. FAUX. Che ex : Sur $\mathbb{R}^2$, la forme quadratique

$q(x) = x_1^2 - x_2^2$ n'est pas déf. positive, pourtant

$$q(\varepsilon_1) > 0 \quad \text{et} \quad q(\varepsilon_2) > 0 \quad \text{pour}$$

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.



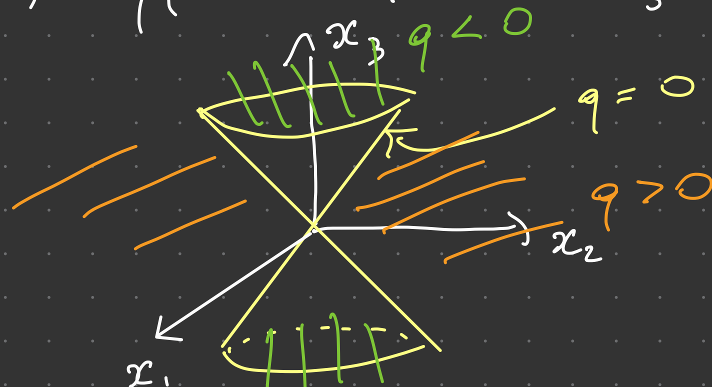
$x_1^2 - x_2^2 = q(x)$.

En jaune, le lieu $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid q(x) = 0\}$

$$q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 = \underline{\underline{R}}^2$$

En dim 3, $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$.



: cône isotrope.

Ex 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 4-x & i & -i \\ -i & 4-x & 1 \\ i & 1 & 4-x \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_3) = (4-x)^3 - 1 - 1 - 3(4-x).$$

$$= (4-x)^3 - 3(4-x) - 2. \quad = (x-2)\,Q(x).$$

$$\chi_A(2) = 0.$$

$$\chi_A(x) = (2 + (2-x))^3 - 3(2 + (2-x)) - 2$$

$$= \cancel{8} + 12(2-x) + 6(2-x)^2 + (2-x)^3$$
$$\cancel{-6} - 3(2-x) \cancel{-2}$$

$$= (2-x)\left[(2-x)^2 + 6(2-x) + 9\right].$$

$$= (2-x)(x^2 - 4x + 4 + 12 - 6x + 3)$$

$$= (2-x)(x^2 - 10x + 25)$$

$$= (2-x)(x-5)^2 \quad \leadsto \quad Sp\,A = \}\underset{\text{mult. 1}}{2}, \underset{\text{mult 2}}{5}\{$$

$$\begin{pmatrix} 4 & i & -i \\ -i & 4 & 1 \\ i & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 2 : \begin{cases} \cancel{2x + iy - iz = 0} & \times 1 \\ -ix + 2y + z = 0 & \times -i \\ ix + y + 2z = 0 & \times i \end{cases} \qquad \cdot\ \underline{L_1} - iL_2 + iL_3 = 0$$

$$\iff \begin{cases} -ix + 2y + z = 0 \\ ix - y + 2z = 0. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -ix + 2y + z = 0 \\ 3y + 3z = 0. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = i\alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{C} \text{ param.}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{vep. pour } \lambda = 2.$$

On <u>sait</u> que $E_5(A) = E_2(A)^{\perp}$

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_5(A)$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{-ix + -y + z = 0.}$$

L'équation du plan complexe $E_5(A)$.

$\rightsquigarrow$ base $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ vep. vap $= 5$.

$$(A \Rightarrow B) \iff \underbrace{(\text{non } B \Rightarrow \text{non } A)}_{\text{Contraposée de } A \Rightarrow B}$$

<u>Déf</u> : • Si q une forme quad. sur E, un vecteur $v \in E$ est dit <u>isotrope</u> (pour q) si $q(v) = 0$.

• q est <u>anisotrope</u> si 0 est le seul vecteur isotrope de q.

$q \rightsquigarrow$ une forme bilinéaire b (dite forme polaire) et si $(e_1, \dots, e_n)$ base de E, la matrice de q dans (e_i) est la matrice $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = b(e_i, e_j)$.

$\rightsquigarrow$ si X est le vecteur coordonnées de $x \in E$ dans la base (e_i), alors :

$$\boxed{q(x) = {}^tXAX.}$$

$b(x, y) = {}^tXAY$, où X, Y = vect. coord. de x, y dans (e_i).

q (ou b) est non-dégénérée si $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

$\iff \forall x \in E, \ (\forall y \in E, b(x,y) = 0 \Rightarrow x = 0)$.

$E^\perp = \{0\}$.

1\. a. Non dégénérée $\overset{?}{\Longrightarrow}$ Anisotrope

<u>FAUX</u>. Ctre ex : $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, d'où q non dégénérée

mais $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est isotrope pour q. ($\Rightarrow$ pas anisotrope).

1\. b. Anisotrope $\overset{?}{\Longrightarrow}$ Non dégénérée.

VRAI. Preuve par contraposée.

Si $A \notin GL_n(\mathbb{R})$, $\exists\, X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mid A.X = 0$

D'où, si v a pour coordonnées X, $q(v) = 0$ et $v \neq 0$.

car $q(v) = {}^tX \underbrace{AX}_{=0}$.

D'où q non anisotrope.

1\. c. q est anisotrope $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ q est définie > 0 ou q est définie < 0.

$\boxed{\Leftarrow}$: Suit de la définition.

$\boxed{\Rightarrow}$: Si q est anisotrope, alors elle est non dégénérée.

$\rightsquigarrow$ de signature (p, q), avec $p + q = n = \dim E$.

$\#\,\text{vap} > 0$ $\qquad$ $\#\,\text{vap} < 0$.

q s'écrit (dans de bonnes coordonnées) :

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2 .$$

Il y a $(n+1)$ signatures possibles :

$$\underbrace{(n,0)}_{\text{déf} > 0}, (n-1,1), \dots, (1,n-1), \underbrace{(0,n)}_{\text{déf} < 0} .$$

Dans ces coordonnées, si $(p,q) \neq (n,0)$ ou $(0,n)$, alors le vecteur $\underbrace{(1,0 \dots 0,1)}_{\neq 0}$ est isotrope.

Ainsi, $\forall (p,q) \neq (0,n), (n,0)$, une f.q. de signature (p,q) n'est pas anisotrope.

CCL : Une forme quadratique anisotrope est déf > 0 ou déf < 0.

1.d. Si $q(e_1) > 0, \dots, q(e_n) > 0$.

$v \in \mathbb{R}^n$, $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$$q(v) = b(v,v) = b\left(\sum_{j=1}^{n} x_i e_i , \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)$$

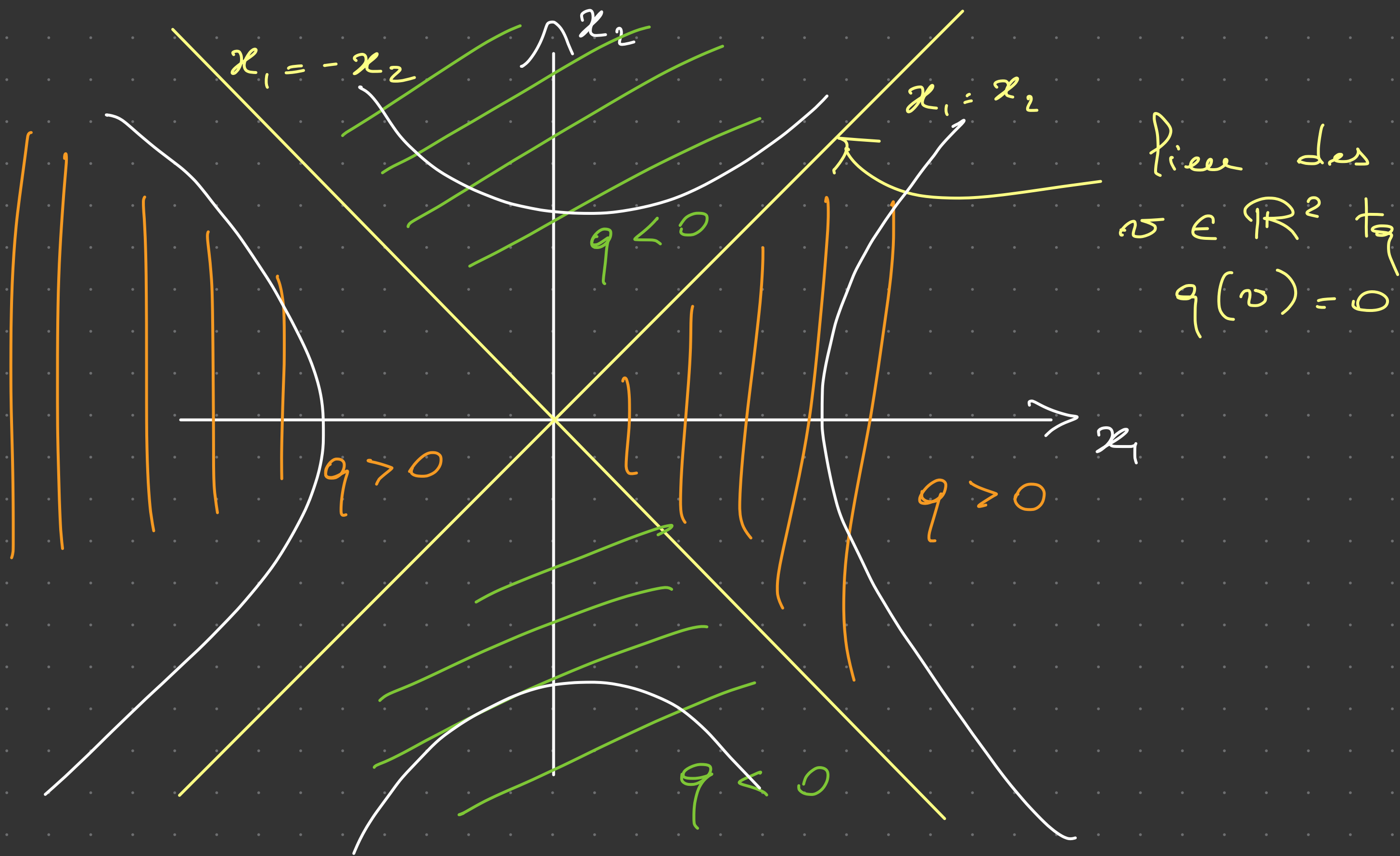
$$= \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i x_j \underline{b(e_i, e_j)} .$$

$i = j$.

$x_1^2 - x_2^2 = q(x)$ sur $\mathbb{R}^2$.

$q(\varepsilon_1) > 0$, où $\varepsilon_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

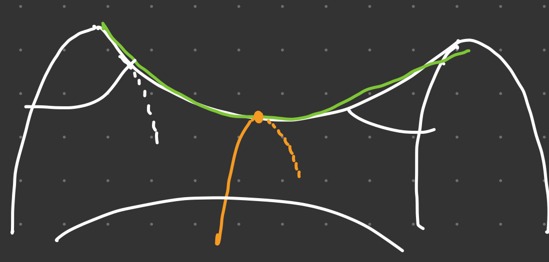
$q(\varepsilon_2) > 0$, où $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$: $q(\varepsilon_2) = 2^2 - 1^2 = 3 > 0$.



$$q(x) = x_1^2 - x_2^2 = 0 \iff x_1^2 = x_2^2$$

$$\iff x_1 = x_2 \text{ ou } x_1 = -x_2.$$

vue comme fonction de deux variables.



Ex 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & i & -i \\ -i & 4 & 1 \\ i & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{VAP ?}$$

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 4-X & i & -i \\ -i & 4-X & 1 \\ i & 1 & 4-X \end{vmatrix}$$

$$= (4-X)^3 - 2 - 3(4-X).$$

$\chi_A(2) = 0$.

$$\chi_A(X) = (2+(2-X))^3 - 2 - 3(2+(2-X)).$$

$\{(X-2)^k, k \geqslant 0\}$ base de $\mathbb{R}[X]$.

$$\chi_A(X) = \cancel{8} + 12(2-X) + 6(2-X)^2 + (2-X)^3$$
$$\cancel{-2}\ \cancel{-6} - 3(2-X).$$

$$= (2-X)\left[(2-X)^2 + 6(2-X) + 9\right]$$

$$= (2-X)(X^2 - 4X + 4 + 12 - 6X + 9)$$

$$= (2-X)(X^2 - 10X + 25).$$

$$= (2-X)(X-5)^2.$$

2 : vap simple, 5 vap double.

$\dim E_2(A) = 1$ $\qquad$ $\dim E_5(A) = 2$.

$$\begin{pmatrix} 2 & i & -i \\ -i & 2 & 1 \\ i & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \text{noyau ?}$$

$$\begin{array}{l|l} \times 1 & \cancel{2x + iy - iz = 0} \\ \times -i & -ix + 2y + z = 0 \\ \times i & ix + y + 2z = 0 \end{array}$$

$\longrightarrow$ on <u>sait</u> que le système est de rang 2.

$$L_1 - i L_2 + i L_3 = 0.$$

$$(Eq\ 2 \text{ et } Eq\ 3) \Longrightarrow Eq\ 1.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -ix + 2y + z = 0 \\ ix + y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -ix + 2y + z = 0 \\ 3y + 3z = 0. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = i\alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{C} \text{ paramètre} \end{cases}$$

$$E_2(A) = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comme A est hermitienne, $E_5(A) = E_2(A)^\perp$.

$E_5(A)$ est le plan complexe de $\mathbb{C}^3$ d'équation :

$$\left\langle \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = 0. \qquad \overline{x_1} y_1 + \overline{x_2} y_2 + \overline{x_3} y_3.$$

$$\boxed{-ix - y + z = 0}$$: équation de $E_5(A)$.

$E_5(A)$ admet pour base : $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix} \qquad -i\alpha - \beta - \beta = 0.$$

$$\alpha = 2i\beta.$$

Bon de vep : $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$

$$\begin{pmatrix} 4 & i & -i \\ -i & 4 & 1 \\ i & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10i \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = 5 \times \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$