Feuille d'exercices n^{o}4 bis : pour s'entrainer ...

1. On se place dans l'espace hermitien standard $(\mathbb{C}^3, \langle -, - \rangle)$. Soit la matrice

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -3i & 0 \\ 3i & -2 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

1.a. Exhiber un vecteur non nul $v \in \mathbb{C}^3$ tel que $Hv = v$. En déduire que H possède une valeur propre $\lambda = 1$ et que l'espace propre associé est $E_\lambda = \mathbb{C}.v$.

1.b. Calculer la trace $\mathrm{tr}(H)$ et le déterminant $\det(H)$ de la matrice H.

1.c. Justifier (sans calculs) que la matrice H possède trois valeurs propres réelles $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. Montrer les relations $\mathrm{tr}(H) = \lambda + \mu + \nu$ et $\det(H) = \lambda\mu\nu$. Calculer μ et ν.

1.d. Déterminer le polynôme caractéristique de H et comparer avec les calculs du **1.c**.

1.e. Déterminer les espaces propres E_μ et E_ν. Justifier que les trois espaces propres de H sont deux à deux orthogonaux.

1.f. Exhiber une matrice unitaire $U \in U_3(\mathbb{C})$ telle que $U^*HU = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$.

2. On se place dans l'espace euclidien standard $(\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle)$. Les vecteurs sont exprimés dans la base canonique : $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$. Soient la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $q(v) = x^2 + 2xy - 4xz - z^2$ et la forme linéaire $l_1 \in (\mathbb{R}^3)^*$ définie par $l_1(v) = x + y - 2z$.

2.a. Montrer que $q - (l_1)^2$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ ne dépendant que de (y, z). En déduire des formes linéaires l_2, l_3 telles que $q(v) = \epsilon_1 l_1(v)^2 + \epsilon_2 l_2(v)^2 + \epsilon_3 l_3(v)^2$ avec $\epsilon_i = \pm 1$.

2.b. Quelle est la signature de la forme quadratique q ? Est-elle non-dégénérée ?

2.c. Trouver la base $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dont (l_1, l_2, l_3) est la base duale de $(\mathbb{R}^3)^*$.

2.d. Expliciter la matrice symétrique $A \in M_3(\mathbb{R})$ vérifiant $q(v) = \langle v, Av \rangle$ pour $v \in \mathbb{R}^3$. Montrer que si $w = \tilde{x}\tilde{e}_1 + \tilde{y}\tilde{e}_2 + \tilde{z}\tilde{e}_3$ alors $q(w) = \epsilon_1\tilde{x}^2 + \epsilon_2\tilde{y}^2 + \epsilon_3\tilde{z}^2$.

2.e. Déduire de **2.d** que si P est la matrice de changement de base de $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ vers (e_1, e_2, e_3) alors ${}^tPAP$ est une matrice diagonale à termes diagonaux ± 1. Exhiber deux vecteurs isotropes de la forme quadratique q qui sont linéairement indépendants.

3. On considère $M_n(\mathbb{R})$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3.a. Montrer que $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tA \cdot B)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$. On note $\| - \|$ la norme associée. Rappeler la décomposition polaire d'une matrice réelle $A \in M_n(\mathbb{R})$.

3.b. Montrer que si OS est la décomposition polaire de A, alors $\|A\|^2 = \|S\|^2$ et $\det(A^2) = \det(S^2)$.

3.c. En utilisant que S est diagonalisable, montrer que $(\det(S^2))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\|S\|^2$.

3.d. En déduire que toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie l'inégalité $\sqrt{n}\det(A)^{\frac{1}{n}} \leq \|A\|$.

3.e. En déduire qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ de déterminant 1 vérifie $\|A\| \geq \sqrt{n}$.