Feuille 1 : Corrigé

Exercice 1. On considère les trois vecteurs $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ définis par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le système (v_1, v_2, v_3) est libre dans $\mathbb{R}^3$. En déduire que c'est une base.

   Solution. On peut revenir à la définition et démontrer que pour tous $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Ceci va se traduire en un système 3×3 en $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, et il s'agit de montrer qu'il est de Cramer, c'est à dire que la matrice associée est de rang (maximal) égal à 3.

   Pour aller plus vite, on montre donc directement que la matrice associée, qui est celle formée des vecteurs colonnes v_1, v_2, v_3, est inversible (une matrice carrée de taille n est de rang n si et seulement si elle est inversible). Ici, il s'agit de la matrice

   $$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   On opère sur les lignes en suivant l'algorithme du pivot de Gauss (rappel : les opérations élémentaires ne modifient pas le rang). Ceci nous donne :

   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L2 \leftarrow L2+L1 \\ L3 \leftarrow L3-L1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L3 \leftarrow L3+L2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   On aboutit sur une une matrice triangulaire supérieure, dont tous les termes diagonaux sont non-nuls. Ceci montre bien que A est de rang 3, donc que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre. Puisque $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, une famille libre de 3 vecteurs est nécessairement génératrice, c'est donc une base.

   Remarque 1. On retiendra que dans ce genre de situation, pour montrer qu'une famille $(v_1, \dots, v_k)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est libre, il suffit de les placer en colonne pour obtenir une matrice (rectangle si $k < n$). Le rang de la famille est alors le rang de la matrice, et on détermine ce dernier en faisant les opérations élémentaires données par l'algorithme de Gauss sur les lignes (ou les colonnes) pour se ramener à une matrice trapèze en général, ou triangulaire dans le cas $k = n$, en argumentant que ces opérations ne modifient pas le rang. Une fois l'algorithme terminé, le nombre de coefficients non-nuls sur la diagonale est le rang, s'il est égal à k, la famille est bien libre.

   Bien-sûr, ceci permet également de calculer le rang d'une famille quelconque de vecteurs. Et bien-sûr encore, selon la situation (question théorique, relation linéaire évidente..), cette approche n'est pas systématiquement la plus pertinente.

2. Montrer qu'il existe une unique forme linéaire $\phi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $\phi_1(v_1) = 1, \phi_1(v_2) = \phi_1(v_3) = 0$. Calculer $\phi(v)$ pour $v \in \mathbb{R}^3$.

   De même, calculer $\phi_2(v)$ pour l'unique forme linéaire ϕ_2 telle que $\phi_2(v_1) = \phi_2(v_3) = 0, \phi_2(v_2) = 1$.

   Enfin, faites le même calcul pour l'unique forme linéaire ϕ_3 telle que $\phi_3(v_1) = \phi_3(v_2) = 0, \phi_3(v_3) = 1$.

Solution. Comme (v_1, v_2, v_3) est une base, toute application linéaire $\mathbb{R}^3 \to E$, où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ quelconque, est entièrement déterminée par sa valeur sur v_1, v_2, v_3, et pour tous $w_1, w_2, w_3 \in E$, il existe une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to E$ telle que $f(v_i) = w_i$. L'existence et l'unicité de ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 résultent donc de ce qui précède, dans le cas $E = \mathbb{R}$.

On veut maintenant connaître explicitement ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3. On écrit $\phi_1 = a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_3$, où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. De façon concrète, ceci revient juste à dire que comme toute forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, ϕ_1 est de la forme $\phi_1(x) = ax_1 + bx_2 + cx_3$, où x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées de x dans la base canonique. On se retrouve alors avec un système linéaire en a, b, c :

$$\begin{cases} \phi_1(v_1) = a - b + c & = 1 \\ \phi_1(v_2) = a + b - c & = 0 \\ \phi_1(v_3) = a + b + c & = 0 \end{cases}$$

La résolution standard par Pivot de Gauss nous donne $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ et $c = 0$, et donc $\phi_1(x) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$. On peut alors déterminer exactement de la même façon ϕ_2 et ϕ_3 – résultats ci-dessous.

Une autre approche : comme (v_1, v_2, v_3) est une base, tout vecteur x s'écrit de façon unique $x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$. En appliquant ϕ_1 à cette relation, on déduit $\lambda_1 = \phi_1(x)$. De même, $\lambda_2 = \phi_2(x)$ et $\lambda_3 = \phi_3(x)$, d'où la relation (cf dernière question) :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ x = \phi_1(x)v_1 + \phi_2(x)v_2 + \phi_3(x)v_3.$$

En d'autre termes, pour voir concrètement ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, il suffit d'exprimer les coordonnées de x dans la nouvelle base, en fonction de celles dans la base canonique. Or A est la matrice de passage de la base canonique vers la base (v_1, v_2, v_3). D'où la relation :

$$\begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \phi_3(x) \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

La question se ramène donc à inverser A. Une méthode économique est de résoudre un système à paramètre $AX = Y$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = y_1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 & = y_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = y_1 \\ 2x_2 + 2x_3 & = y_1 + y_2 \\ -2x_2 & = -y_1 + y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = y_1 \\ 2x_2 + 2x_3 & = y_1 + y_2 \\ 2x_3 & = y_2 + y_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 & = \frac{1}{2}(y_1 - y_2) \\ x_2 & = \frac{1}{2}(y_1 - y_3) \\ x_3 & = \frac{1}{2}(y_2 + y_3) \end{cases}$$

Finalement,

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où } \begin{cases} \phi_1(x) & = \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \\ \phi_2(x) & = \frac{1}{2}(x_1 - x_3) \\ \phi_3(x) & = \frac{1}{2}(x_2 + x_3) \end{cases}$$

3. Montrer que le système (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est libre dans $(\mathbb{R}^3)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. En déduire que c'est une base. *Rappel :* C'est la base *duale* de (v_1, v_2, v_3).

   Solution. En notant toujours $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base duale de la base canonique, on vient de voir que $\phi_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$, $\phi_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$ et $\phi_3 = \frac{1}{2}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)$. La matrice coordonnée de ces formes linéaires est donc $(A^{-1})^T$, qui est inversible. Ceci montre qu'elles forment une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.

4. Montrer que tout $v \in \mathbb{R}^3$ s'écrit $v = \phi_1(v)v_1 + \phi_2(v)v_2 + \phi_3(v)v_3$. Pourquoi les $\phi_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ s'appellent aussi *fonctions coordonnées* ?

Solution. Déjà observé ci-dessus.

Exercice 2. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré $\leqslant n$.

1. Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$? Indiquer une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

   Solution. Il est de dimension $n+1$, une base étant $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.

2. Montrer que pour tout entier naturel i, la fonction $\phi_i : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} : P \mapsto \frac{P^{(i)}(0)}{i!}$ définit une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, nulle pour $i > n$.

   Solution. La linéarité suit de la linéarité de l'évaluation $P \mapsto P(0)$ et de celle de la dérivation. Une récurrence rapide nous montre que $(X^k)^{(k)} = k!$ pour tout $k \geqslant 1$. En particulier, $(X^k)^{(i)} = 0$ pour tout $i \geqslant n+1$, et par linéarité, $P^{(i)} = 0$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$. A fortiori, on a bien $\phi_i = 0$ pour tout $i \geqslant n+1$.

3. Montrer que le système $(\phi_0, \dots, \phi_n)$ est libre dans $(\mathbb{R}_n[X])^*$. En déduire que c'est une base.

   Solution. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ des scalaires tels que $\sum_{i=0}^n \lambda_i \phi_i = 0$. On évalue cette relation sur les polynômes de la forme $P = X^k$. Rappelons que pour tout $i \geqslant 0$, avec $i \leqslant k$, on a $[X^k]^{(i)} = k!/(k-i)!X^{k-i}$, et $[X^k]^{(i)} = 0$ pour tout $i > k$. Par conséquent, $\phi_i(X^k) = 0$ si $i \neq k$ et $\phi_k(X^k) = k!/k! = 1$ pour tous $i, k \in \{1, \dots, n\}$. Ainsi, nous obtenons

   $$\forall k \in \{0, \dots, n\},\ \sum_{i=0}^n \lambda_i \phi_i(X^k) = \lambda_k = 0.$$

   Ce qui montre bien $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$. La famille $(\phi_0, \dots, \phi_n)$ est donc libre. Elle est de cardinal $n+1$ dans un espace de dimension $n+1$, c'est donc une base.

4. Exhiber un système de polynômes $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ tel que $\phi_i(P_j) = \delta_{ij}$, i.e. $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)$ et sa base duale.

   Solution. On a précisément montré à la question précédente que le système $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ dont la base duale est $(\phi_0, \dots, \phi_n)$.

5. Que donne l'identité $P = \phi_0(P)P_0 + \phi_1(P)P_1 + \cdots + \phi_n(P)P_n$ pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$?

   Solution. Les $\phi_i(P)$ sont des nombres tels que

   $$P = \sum_{i=0}^n \phi_i(P) X^i.$$

   Il s'agit donc des coefficients du polynôme.

6. Pour un entier naturel i, déterminer le sous-espace vectoriel des polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ annulés par $\phi_0, \dots, \phi_i$. Quelle est sa dimension ?

   Solution. Notons $V_i = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \phi_0(P) = \cdots = \phi_i(P) = 0\}$, pour $i \in \{0, \dots, n\}$. D'après la question précédente, V_i est le sous-espace formé des polynômes de degré au plus n dont les $i+1$ premiers coefficients sont nuls. C'est-à-dire :

   $$V_i = \left\{ \sum_{k=i+1}^n a_k X^k,\ a_{i+1}, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\} \text{ si } i < n, \text{ et } V_n = \{0\}.$$

   Ainsi $\dim V_i = n - i$.

Exercice 3. On considére $n+1$ points $a_0, \dots, a_n$ de $\mathbb{R}$ deux à deux distincts. On note $\alpha_i : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\alpha_i(P) = P(a_i)$.

1. Montrer que les α_i sont des formes linéaires et que le système $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.

Solution. Comme à l'exercice précédent, il est immédiat de vérifier la linéarité des α_i.
En s'inspirant de l'exercice précédent, on recherche une famille de polynômes $(P_0, \ldots, P_n)$ tels que $P_i(a_j) = 0$ si et seulement si $i \neq j$. Comme les a_j sont deux à deux distincts, P_i doit être divisible par le produit

$$\hat{L}_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (X - a_j) \in \mathbb{R}_n[X].$$

De plus, toujours parce que les a_j sont deux à deux distincts, on a $\hat{L}_i(a_j) \neq 0$.
Soit maintenant $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ des scalaires tels que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j = 0$. Si on évalue cette relation sur $\hat{L}_i$, on obtient $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j(\hat{L}_i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \hat{L}_i(a_j) = \lambda_i \hat{L}_i(a_i) = 0$, d'où $\lambda_i = 0$ et ceci quel que soit $i \in \{0, \ldots, n\}$. Ce qui montre que la famille $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ est libre, donc une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$ par cardinalité.

2. Expliciter des polynômes $L_i, i = 0, 1 \ldots, n$ tels que $\alpha_i(L_j) = \delta_{ij}$. Ce sont les polynômes d'interpolation de Lagrange.

   Solution. Il suffit de normaliser les polynômes introduits à la question précédente. Prenons donc
$$L_i(X) = \frac{\hat{L}_i(X)}{\hat{L}_i(a_i)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

3. Expliciter les polynômes de Lagrange (L_0, L_1, L_2) dans le cas particulier $n = 2$ et $(a_0, a_1, a_2) = (-1, 0, 1)$. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifiant $P(0) = \frac{P(-1)+P(1)}{2}$.

   Solution. Nous avons $L_0 = \frac{X(X-1)}{2}$, $L_1 = 1 - X^2$ et $L_2 = \frac{X(X+1)}{2}$. La question revient à déterminer l'ensemble
$$V = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \alpha_1(P) = \frac{1}{2}(\alpha_0(P) + \alpha_2(P)) \right\} = \mathrm{Ker}(\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_2)).$$

   Comme $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ est la base duale de (L_0, L_1, L_2), il est judicieux de rechercher les polynômes de V en les décomposant dans cette base. Ce qui nous donne :
$$\begin{aligned}
\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ aL_0 + bL_1 + cL_2 \in V &\iff (\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_2)(aL_0 + bL_1 + cL_2) = 0 \\
&\iff -\frac{a}{2} + b - \frac{c}{2} = 0 \\
&\iff b = \frac{a+c}{2}
\end{aligned}$$

   Finalement, on obtient
$$\begin{aligned}
V &= \left\{ \lambda L_0 + \frac{\lambda + \mu}{2} L_1 + \mu L_2,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \frac{\lambda X(X-1) + \mu X(X+1) + (\lambda + \mu)(1 - X^2)}{2},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \frac{(\mu - \lambda)X + \lambda + \mu}{2},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathbb{R}_1[X].
\end{aligned}$$

   On voit que V est l'ensemble des polynômes affines (de degré 1).

Exercice 4. On considère pour tout entier naturel i, la fonction suivante sur $\mathbb{R}_n[X]$:
$$\psi_i(P) = \int_{-1}^{1} t^i P(t) dt.$$

1. Montrer que ψ_i est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

   Solution. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous avons par définition

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \psi_i(P+\lambda Q) = \int_{-1}^{1} t^i(P(t)+\lambda Q(t))\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} t^i P(t)\mathrm{d}t + \lambda \int_{-1}^{1} t^i Q(t)\mathrm{d}t = \psi_i(P)+\lambda\psi_i(Q).$$

   Ceci montre que ψ_i est bien linéaire.

2. Montrer que le système $(\psi_0, \ldots, \psi_n)$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$. *Indication :* On pourra déduire de $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \psi_i = 0$ que $\int_{-1}^{1} P^2(t)dt = 0$ pour un polynôme P bien choisi ...

   Solution. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \psi_i = 0$. Par linéarité de l'intégrale, ceci signifie :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \psi_i(P) = \int_{-1}^{1} \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i t^i \right) P(t)\mathrm{d}t = 0.$$

   Prenons $P_0 = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i X^i \in \mathbb{R}_n[X]$. La relation ci-dessus donne $\int_{-1}^{1} P_0(t)^2 \mathrm{d}t = 0$. D'une façon générale, une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ **continue** et positive, telle que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$ est nécessairement identiquement nulle sur $[a, b]$. En appliquant ceci à la fonction polynômiale $t \mapsto P_0(t)^2$ (qui est bien-sûr continue), nous obtenons $P_0(t) = 0$ pour tout $t \in [-1, 1]$, ce qui implique $P_0 = 0$. D'où $\lambda_0 = \ldots = \lambda_n = 0$. La famille $(\psi_0, \ldots, \psi_n)$ est bien libre.

3. Trouver la base (P_0, P_1, P_2) de $\mathbb{R}_2[X]$ dont (ψ_0, ψ_1, ψ_2) est la duale.

   Solution. On utilise ici le fait suivant. Soient (e_i) et (f_i) deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie n, soient (e_i^*) et (f_i^*) les bases duales associées. Si P est la matrice de passage de (e) à (f), alors $(P^T)^{-1}$ est celle de (e^*) à (f^*). Ceci découle notamment de la Proposition 1.12 dans le résumé de cours.
   Dans notre cas, (e) va être la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, et on cherche (f) telle que $(f^*) = (\psi) := (\psi_0, \psi_1, \psi_2)$. La transposée de la matrice de passage de (e^*) à (ψ) est

$$\begin{pmatrix} \psi_0(1) & \psi_0(X) & \psi_0(X^2) \\ \psi_1(1) & \psi_1(X) & \psi_1(X^2) \\ \psi_2(1) & \psi_2(X) & \psi_2(X^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$$

   L'inverse de cette matrice est donc la matrice de passage de la base $(1, X, X^2)$ à la base que nous recherchons de $\mathbb{R}_2[X]$. On calcule que cette inverse est

$$\begin{pmatrix} 9/8 & 0 & -15/8 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ -15/8 & 0 & 45/8 \end{pmatrix}.$$

   Les polynômes recherchés sont donc :

$$\begin{cases} P_0 & = -15/8X^2 + 9/8 \\ P_1 & = 3/2X \\ P_2 & = 45/8X^2 - 15/8 \end{cases}$$

Exercice 5. Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$ s'appelle un *hyperplan* de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que le noyau d'une forme linéaire non-nulle ϕ sur $\mathbb{R}^n$ est un hyperplan H de $\mathbb{R}^n$. On dit que H est défini par ϕ.

   Solution. Une forme linéaire à une image qui est un sous-espace de $\mathbb{R}$, donc $\{0\}$ ou $\mathbb{R}$ entier. Si elle est non nulle, l'image est $\mathbb{R}$. Le théorème du rang nous donne alors

$$\dim(\operatorname{Ker}\phi) + 1 = n.$$

   Ce qui montre bien que $\operatorname{Ker}\phi$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

2. Montrer que deux formes linéaires non-nulles ϕ, ψ définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles.

Solution. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $\operatorname{Ker}\phi = \operatorname{Ker}\psi =: H$. Soit $v \in \mathbb{R}^n \setminus H$, de sorte que $\mathbb{R}^n = H \oplus \mathbb{R}.v$. Définissons $c = \psi(v)/\phi(v) \in \mathbb{R}^*$ (ce qui est possible par choix de v). Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique couple $(x_H, \lambda_x) \in H \times \mathbb{R}$ tel que $x = x_H + \lambda_x v$. Nous voyons alors que

$$\psi(x) = \psi(x_H) + \lambda_x \psi(v) = \lambda_x c\phi(v) = c(\phi(x_H) + \lambda_x \phi(v)) = c\phi(x).$$

D'où $\psi = c\phi$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons qu'il existe c tel que $\psi = c\phi$. Nécessairement $c \neq 0$ car $\psi \neq 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\psi(x) = 0 \iff c\phi(x) = 0 \iff \phi(x) = 0$. D'où $\operatorname{Ker}\phi = \operatorname{Ker}\psi$.

3. Montrer que pour trois formes linéaires non-nulles ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 avec hyperplans H_1, H_2, H_3 on a $H_3 \supset H_1 \cap H_2$ si et seulement si $\phi_3 \in Vect(\phi_1, \phi_2)$.

Solution. $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\phi_3 = \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2$. Soit $x \in H_1 \cap H_2$. Alors, $\phi_3(x) = \lambda_1\phi_1(x) + \lambda_2\phi_2(x) = 0$. Ainsi, $x \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow x \in H_3$, soit $H_1 \cap H_2 \subset H_3$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $H_3 \supset H_1 \cap H_2$, autrement dit $H_1 \cap H_2 \cap H_3 = H_1 \cap H_2$. On va utiliser le fait suivant dont la vérification suit directement des définitions : pour toutes formes linéaires $\psi_1, \dots, \psi_k \in E^*$,

$$\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}\psi_i = \operatorname{Vect}(\psi_1, \dots, \psi_k)^{\perp}.$$

Ainsi, notre hypothèse est $\operatorname{Vect}(\phi_1, \phi_2)^{\perp} = \operatorname{Vect}(\phi_1, \phi_2, \phi_3)^{\perp}$. Par la propriété $\dim V^{\perp} = n - \dim V$, ceci montre que $\dim \operatorname{Vect}(\phi_1, \phi_2) = \dim \operatorname{Vect}(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$. Et puisqu'il y a une inclusion évidente et égalité des dimensions, il suit $\operatorname{Vect}(\phi_1, \phi_2) = \operatorname{Vect}(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, et donc $\phi_3 \in \operatorname{Vect}(\phi_1, \phi_2)$.

4. Application : on considère l'hyperplan H_1 (resp. H_2) de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (resp. $2x_1 + 3x_3 = 0$). Montrer que $D = H_1 \cap H_2$ est une droite vectorielle, et déterminer l'equation de l'hyperplan $H \subset \mathbb{R}^3$ contenant D et le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solution. Comme $D \subset H_1$, il est de dimension $0, 1$, ou 2. Par la formule de Grassmann, $\dim H_1 \cap H_2 \geqslant 1$. S'il était de dimension 2, on aurait $H_1 \cap H_2 = H_1$, et donc $H_1 = H_2$, ce qui est faux puisque (par exemple !) le vecteur $(1, -1, 0)$ est dans H_1 mais pas H_2. Ainsi, $\dim D = 1$.

Soit $\phi \in (\mathbb{R}^3)^*$ telle que $H = \operatorname{Ker}\phi$. Puisqu'on impose $H_1 \cap H_2 \subset H$, par la question précédente, on sait que $\phi \in \operatorname{Vect}(\phi_1, \phi_2)$, où $\phi_1(x) = x_1 + x_2 + x_3$ et $\phi_2(x) = 2x_1 + 3x_3$. On a donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\phi = a\phi_1 + b\phi_2$. La deuxième condition est que H contient le vecteur de coordonnées $(1, 1, 1)$, c'est à dire que $\phi(1, 1, 1) = 0$. Cette dernière condition se traduit par l'équation $3a + 5b = 0$, dont le couple $(-5, 3)$ est *une* solution. Ainsi, la forme linéaire ϕ définie dans les coordonnées standards de $\mathbb{R}^3$ par

$$\phi(x) = -5(x_1 + x_2 + x_3) + 3(2x_1 + 3x_3) = x_1 - 5x_2 + 4x_3$$

définit le plan H.

Exercice 6. Soient V, W deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer que $(V + W)^{\perp} = V^{\perp} \cap W^{\perp}$.

Solution. $\boxed{\subset}$ Soit $\phi \in (V + W)^{\perp}$. Par définition, $\forall x \in V + W$, $\phi(x) = 0$. En particulier, $\forall x \in V$, $\phi(x) = 0$ et $\forall x \in W$, $\phi(x) = 0$, c'est à dire $\phi \in V^{\perp} \cap W^{\perp}$.

$\boxed{\supset}$ Soit $\phi \in V^{\perp} \cap W^{\perp}$. Soit $x \in V + W$. Alors, $\exists (v, w) \in V \times W$ tel que $x = v + w$. Par conséquent $\phi(x) = \phi(v) + \phi(w) = 0$ par choix de ϕ. Ainsi, ϕ s'annule sur tout $V + W$, ce qui signifie $\phi \in (V + W)^{\perp}$.

2. Montrer que $(V \cap W)^\perp = V^\perp + W^\perp$.

   Solution. $\boxed{\supset}$ Soit $\phi \in V^\perp + W^\perp$. Il existe $(\phi_1, \phi_2) \in V^\perp \times W^\perp$ tel que $\phi = \phi_1 + \phi_2$. Soit $x \in V \cap W$. Alors $\phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x) = 0$ car $x \in V$ et $x \in W$.

   Une inclusion étant établie, nous pouvons conclure en montrant égalité des dimensions. On calcule avec la formule de Grassmann :

$$\begin{aligned}\dim(V^\perp + W^\perp) &= \dim(V^\perp) + \dim(W^\perp) - \dim(V^\perp \cap W^\perp)\\ &= n - \dim(V) + n - \dim(W) - \dim(V+W)^\perp \text{ d'après l'identité précédente}\\ &= n - \dim(V) + n - \dim(W) - n + \dim(V+W)\\ &= n - \dim(V \cap W) = \dim(V \cap W)^\perp.\end{aligned}$$

3. Montrer que les identités précéndentes peuvent être déduites l'une de l'autre par bidualité.

   Solution. En utilisant l'identification canonique $\Phi : E \to E^{**} := (E^*)^*$, on sait que pour tout $W' \subset E^*$, il n'y a pas d'ambigüité à parler de l'orthogonal de W' dans E ou dans E^{**}. Autrement dit,

$$\Phi(\{x \in E \mid \forall \phi \in W',\ \phi(x) = 0\}) = \{\ell \in E^{**} \mid \forall \phi \in W',\ \ell(\phi) = 0\}.$$

   Supposons avoir établi la relation de la première question. Elle est vraie pour tout espace de dimension finie, en particulier pour E^*, et en prenant pour sous-espaces de E^* les orthogonaux $V' = V^\perp$ et $W' = W^\perp$. Ceci nous donne

$$(V^\perp)^\perp \cap (W^\perp)^\perp = (V^\perp + W^\perp)^\perp,$$

   que, quitte à appliquer Φ^{-1}, nous voyons comme une relation dans E d'après ce qui est expliqué ci-dessus. On sait également que pour tous sous-espaces $X \subset E$ et $X' \subset E^*$, on a $(X^\perp)^\perp = X$ et $((X')^\perp)^\perp = X'$ (une inclusion facile + égalité des dimensions). D'où

$$V \cap W = (V' + W')^\perp,$$

   et en prenant l'orthogonal de cette relation, nous obtenons bien

$$(V \cap W)^\perp = V' + W' = V^\perp + W^\perp.$$

   De façon tout à fait similaire, on peut remonter de la deuxième à la première identité.