Feuille d'exercices n^{o}5: Espaces affines et transformations affines

1. Soit E un espace affine de direction V. L'ensemble des points E est donc muni d'une action associative $E \times V \to E : (x, \vec{v}) \mapsto x + \vec{v}$ qui vérifie que pour tous $x, y \in E$ il existe un et un seul $\vec{v} \in V$ tel que $x + \vec{v} = y$. On notera $\vec{v} = \overrightarrow{xy}$.

1.a. Montrer que l'application $E \times E \to V : (x, y) \mapsto \overrightarrow{xy}$ vérifie la *relation de Chasles* $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$.

1.b. Montrer que $x + \vec{v} = y$ si et seulement si $\forall O \in E : \overrightarrow{Ox} + \vec{v} = \overrightarrow{Oy}$.

1.c. Montrer que $\overrightarrow{x + \vec{v}, y + \vec{w}} = \vec{w} + \overrightarrow{xy} - \vec{v}$.

2. Barycentres. On considère trois points x_0, x_1, x_2 de l'espace affine $\mathbb{R}^2$.

2.a. Montrer que (x_0, x_1, x_2) forme un repère affine de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si l'enveloppe convexe de $\{x_0, x_1, x_2\}$ est un triangle d'intérieur non vide.

2.b. Ecrire l'équation de la médiane passant par x_0 en coordonnées barycentriques par rapport à (x_0, x_1, x_2).

2.c. Montrer que les trois médianes du triangle s'intersectent en un point unique, le barycentre du triangle.

2.d. Formuler une proporiété analogue du barycentre d'un repère affine (x_0, x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$.

3. Sous-espaces affines. Soit (E, V) un espace affine. Soit $F \subset E$ une partie non vide. Pour $x \in F$ on note $(F, x) = \{\vec{v} \in V \,|x + \vec{v} \in F\}$.

3.a. Montrer que pour $x, y \in F$, (F, x) est un sous-espace vectoriel de V si et seulement si (F, y) en est un. Donc, cette propriété ne dépend pas du choix de $x \in F$. Si elle est satisfaite, on dit que F est un *sous-espace affine* de E.

3.b. On choisit $O \in E$. Montrer que pour un sous-espace affine F de E, il existe $x \in F$ et un sous-espace vectoriel W de V tel que $F = W + \overrightarrow{0x}$. Montrer que $W + \overrightarrow{0x} = F = W + \overrightarrow{0y}$ si et seulement si $\overrightarrow{xy} \in W$.

3.c. Montrer que deux sous-espaces affines F_1, F_2 de E de même dimension ont la même direction si et seulement si soit $F_1 = F_2$ soit $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

3.d. Soit $z \in E - F$. Montrer qu'il existe un et un seul sous-espace affine G de E tel que $z \in G$, $\dim F = \dim G$ et $F \cap G = \emptyset$.

4. Projections affines. On dit que deux sous-espaces affines sont *transverses* s'ils s'intersectent en un seul point et leurs dimensions sont complémentaires.

4.a. Montrer deux sous-espaces affines $(F_1, V_1), (F_2, V_2)$ de (E, V) sont transverses si et seulement si $V_1 \oplus V_2 = V$.

4.b. Montrer que pour deux sous-espaces affines transverses de E il existe une et une seule application affine $pr_{F_1}^{\vec{F}_2} : E \to F_1$ appliquant F_2 sur $F_1 \cap F_2$. On appelle $pr_{F_1}^{\vec{F}_2}$ la *projection affine sur F_1 parallèle à la direction de F_2*.

Indication: Comme $O = F_1 \cap F_2$ est point fixe de la projection, la projection est entièrement déterminée par sa partie linéaire (cf. **6.a**).

4.c. Soient x, y, z trois points distincts d'une droite affine D. On note $\frac{\overrightarrow{xy}}{\overrightarrow{xz}}$ l'unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{xy} = \lambda \overrightarrow{xz}$. Montrer que $y = \lambda x + (1-\lambda) z$ en coordonnées barycentriques par rapport au repère affine (x, z) de D. Formuler en fonction du rapport $\frac{\overrightarrow{xy}}{\overrightarrow{xz}}$ la propriété géométrique que y se situe entre x et z.

5. Trois théorèmes de géométrie plane.–

5.a. (Thalès) Soient $D_1, D_2, D_3 \subset \mathbb{R}^2$ trois droites distinctes et parallèles. Alors pour toutes droites D, D' transverses à D_1 on a la formule:

$$\frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{ac}} = \frac{\overrightarrow{a'b'}}{\overrightarrow{a'c'}}$$

où a, b, c (resp. a', b', c') sont les intersections de D (resp. D') avec D_1, D_2, D_3. *Indication:* Considérer la projection affine sur D' parallèle à D_1, D_2, D_3.

5.b. (Ceva) Soit (a, b, c) un repère affine de $\mathbb{R}^2$ et $a', b', c' \in \mathbb{R}^2$ tels que $a' \notin \{b, c\}$, et $b' \notin \{a, c\}$ et $c' \notin \{a, b\}$.

Alors $\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \cdot \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = -1$ si et seulement si les droites $D_{aa'}, D_{bb'}, D_{cc'}$ sont soit concurrentes soit parallèles.

5.c. (Menelaüs) Soit (a, b, c) un repère affine de $\mathbb{R}^2$ et $a', b', c' \in \mathbb{R}^2$ distincts de a, b, c et tels que $a' \in D_{bc}, b' \in D_{ca}, c' \in D_{ab}$.

Alors $\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \cdot \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = 1$ si et seulement si a', b', c' sont alignés.

6. Sous-groupes du groupe affine. On note $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ le groupe des transformations affines $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

6.a. Soit $O \in \mathbb{R}^n$. Montrer que le sous-groupe de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ des transformations fixant O est isomorphe au groupe linéaire $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$.

6.b. Montrer que les translations de $\mathbb{R}^n$ forment un sous-groupe commutatif $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$. Etant donné $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ et $t_b \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ montrer que $A t_b A^{-1}$ est une translation. De quelle translation s'agit-il ?

6.c. Soit P un ensemble fini de points de $\mathbb{R}^n$. Montrer que le sous-groupe G_P des $\phi \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\phi(P) = P$ laisse invariant l'enveloppe convexe C_P de P et fixe le barycentre de P. Montrer que si P est un repère affine de $\mathbb{R}^n$ alors le groupe G_P se plonge dans le groupe $\mathrm{Bij}(P)$ des permutations de P.

6.d. Soit Δ l'ensemble des sommets d'un triangle équilatéral de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la partie linéaire $\vec{\phi}$ de tout $\phi \in G_\Delta$ est une application orthogonale. Montrer que G_Δ s'identifie à $\mathrm{Bij}(\Delta)$ et contient donc 6 éléments.

6.e. Soit $\Box$ l'ensemble des sommets d'un carré de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la partie linéaire $\vec{\phi}$ de tout $\phi \in G_\Box$ est une application orthogonale. En déduire que le plongement $G_\Box \hookrightarrow \mathrm{Bij}(\Box)$ n'est pas surjectif. Montrer que $G_\Box$ contient au moins 8 éléments.

Mots-clés : Espace affine, repère affine, coordonnées barycentriques, transformations affines, convexité.