UCA – ALGÈBRE & GÉOMÉTRIE – **L3 2021-2022**

CONTRÔLE DU 1 OCTOBRE 2021, DURÉE : 0H55

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 3.

a. Montrer que l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tels que $P(0) = P(1) = 0$ forme un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}_3[X]$.
Formuler une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ pour que P appartienne à V.

b. Montrer que l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tels que $P'(0) = P'(1) = 0$ forme un sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}_3[X]$.
Formuler une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ pour que P appartienne à W.

c. Déterminer l'intersection $V \cap W$. Que peut-on en déduire sur la dimension de $V + W$? *Indication :* on pourra utiliser la formule de Grassmann $\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W)$.

d. On définit quatre formes linéaires $\phi_i : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$ par $\phi_1(P) = P(0), \phi_2(P) = P(1), \phi_3(P) = P'(0), \phi_4(P) = P'(1)$.
Montrer que $V = \ker(\phi_1) \cap \ker(\phi_2)$ et que $W = \ker(\phi_3) \cap \ker(\phi_4)$.
En déduire que $\mathrm{Vect}(\phi_1, \phi_2) + \mathrm{Vect}(\phi_3, \phi_4) = V^\perp + W^\perp = \mathbb{R}_3[X]^*$.
Conclure que $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]^*$.

e. Expliciter la base (P_1, P_2, P_3, P_4) de $\mathbb{R}^3[X]$ dont $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ est la duale.

f. Déterminer l'ensemble U des polynômes $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(0) = P(1)$ et $P'(0) = -P'(1)$. Est-ce un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$? Si oui, quel est son orthogonal $U^\perp$ dans $\mathbb{R}_3[X]^*$?

BARÊME INDICATIF : 1.5+1.5+1+2+2+2 = 10 PTS