3. a. Mq $\underbrace{A \in O_n(\mathbb{R})}_{\overset{def}{\Longleftrightarrow}\ {}^tAA = I_n}$ ssi ses colonnes forment une b.o.n de $\mathbb{R}^n$ (pour la structure euclidienne standard)

$A = (a_{ij})$

$[{}^tA]_{ij} = a_{ji}$.

Notons $C_1 \dots C_n$ les colonnes de A.

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \quad C_{j'} = \begin{pmatrix} a_{1j'} \\ \vdots \\ a_{nj'} \end{pmatrix}$$

$\forall j$, C_j normée ssi $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$.

$\forall j \neq j'$ $C_j \perp C_{j'}$ ssi $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \times a_{ij'} = 0$

$$[{}^tAA]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, a_{kj}$$

C'est la même condition.

$$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$A \in O_n(\mathbb{R})$ ssi ${}^tAA = I_n$ ssi $\forall i,j$, $[{}^tAA]_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$.

ssi $\boxed{\begin{cases} \forall i, & \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 = 1 \quad (i=j) \\ \forall i,j,\ i \neq j, & \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, a_{kj} = 0. \end{cases}}$

3. a. Matrices de permutation.

Pour $\sigma \in \Sigma_n$, on note $A_\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'unique app. linéaire définie par : $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $A_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$, où

$(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. → elle est orthonormée pr la struct. euc. canonique.

E, F : espaces vect. sur un corps k. Une app. linéaire $f : E \to F$

$(e_1, \dots, e_n)$ base de E est uniquement définie par

$(e_i)_{i \in I}$ la donnée de $f(e_1), \dots, f(e_n)$.

<u>Ex</u> : $n = 2$

$$\Sigma_2 = \{ \overset{\sigma_1}{id}, \overset{\sigma_2}{\tau} \}$$

$$\tau : \begin{cases} 1 \longmapsto 2 \\ 2 \longmapsto 1 \end{cases} \quad \text{transposition.}$$

$$A_{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{\sigma_1}(e_1) = e_{\sigma_1(1)} = e_1$$

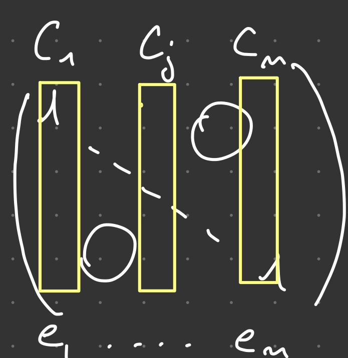
$$A_{\sigma_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_{\sigma_1}(e_2) = e_{\sigma_1(2)} = e_2.$$

$$A_{\sigma_2}(e_1) = e_{\sigma_2(1)} = e_2$$

$$A_{\sigma_2}(e_2) = e_{\sigma_2(2)} = e_1.$$

n général, $\Sigma_n = \{ id, \dots \}$.

id ↔ matrice I_n.   ← σ



$$A_\sigma = \begin{array}{cccc} C_{\sigma(1)} & C_{\sigma(j)} & & C_{\sigma(n)} \\ \end{array}$$
$$A_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & | & \vdots \\ \vdots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$n=3$: P. ex. $\sigma = (1\,2\,3)$

$1 \mapsto 2$

$2 \mapsto 3$

$3 \mapsto 1$

$$A_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

M.q. $\forall n,\ \forall \sigma \in \Sigma_n,\ A_\sigma \in O_n(\mathbb{R})$.

En effet, la j-ème colonne de A_σ est $e_{\sigma(j)} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow \sigma(j) \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$

- $\| e_{\sigma(j)} \|^2 = 1$.

$j \neq j'$, • $\langle e_{\sigma(j)}, e_{\sigma(j')} \rangle = 0$ car $\sigma(j) \neq \sigma(j')$.
(σ injective).

Les colonnes forment une b.o.n de $\mathbb{R}^n$, d'où $A_\sigma \in O_n(\mathbb{R})$.

3.b. M.q $\{ \sigma \in \Sigma_n \longmapsto A_\sigma \in O_n(\mathbb{R}) \}$ est un morphisme de groupes injectif.

i.e.
- $\forall \sigma, \tau \in \Sigma_n,\ A_{\sigma\tau} = A_\sigma . A_\tau$
- $\forall \sigma \in \Sigma_n,\ A_{\sigma^{-1}} = [A_\sigma]^{-1}$
- $\forall \sigma \in \Sigma_n,\ A_\sigma = I_n \Longrightarrow \sigma = id.$

ici : $f : \Sigma_n \to O_n(\mathbb{R})$, $f(\sigma) = A_\sigma$.

G, H groupes, $f : G \to H$ morphisme.

Alors f est inj ssi $\operatorname{Ker} f = \{ g \in G \mid f(g) = e_H \}$

$= \{ e_G \}$.

$g_0, g_1 \in G$ tq $f(g_0) = f(g_1)$.

$\times f(g_1)^{-1}$ $\quad$ $\times f(g_1)^{-1}$

$f(g_0) f(g_1)^{-1} = e_H$

$f(g_0 g_1^{-1}) = e_H$

$\Downarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{e_G\}$.

$g_0 g_1^{-1} = e_G$

i.e. $g_0 = g_1$

Vérifions $\forall \sigma, \tau \in \Sigma_n$,

$$A_{\sigma\tau} \overset{?}{=} A_\sigma A_\tau.$$

$A_{\sigma\tau}$ $\qquad$ $A_\sigma A_\tau$

$f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, (e_i) base de E

Si $\forall i$, $f(e_i) = g(e_i)$

alors $f = g$.

Par déf,

$$A_{\sigma\tau}(e_i) = e_{\sigma\circ\tau(i)}.$$

$$[A_\sigma \cdot A_\tau](e_i) = A_\sigma \cdot [\underbrace{A_\tau \cdot e_i}_{e_{\tau(i)}}] = A_\sigma \cdot e_{\tau(i)} = e_{\sigma(\tau(i))}.$$

D'où $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $A_{\sigma\tau}(e_i) = (A_\sigma A_\tau)(e_i)$.

D'où $\quad A_{\sigma\tau} = A_\sigma A_\tau$.

$$A_{\sigma^{-1}} = (A_\sigma)^{-1} \qquad (A_{\sigma^{-1}})(e_i) = e_{\sigma^{-1}(i)}.$$

$\Updownarrow$

$$\underbrace{A_\sigma \times A_{\sigma^{-1}}}_{e_i} = I_n \qquad (A_\sigma \times A_{\sigma^{-1}})(e_i) = A_\sigma \cdot e_{\sigma^{-1}(i)}$$

$$= e_{\sigma(\sigma^{-1}(i))} = e_i$$

$$= I_n \cdot e_i$$

- Si $A_\sigma = I_n$, alors $\sigma = id$. (injectivité).

Par hyp., $\underline{\forall i \in \{1, \dots, n\}}$, $A_\sigma \cdot e_i = e_i$.

$$e_{\sigma(i)} = e_i$$

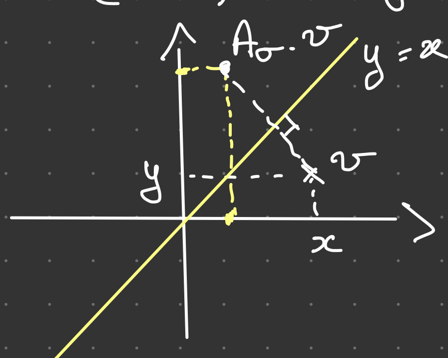
$$\Rightarrow \underline{\sigma(i) = i}$$

i.e. $\sigma = id$.

3.c. Pour $\sigma = (ij)$: $\sigma(k) = \begin{cases} k & \text{si } k \notin \{i, j\} \\ i & \text{si } k = j \\ j & \text{si } k = i \end{cases}$

<u>Q</u> : Qui est A_σ ?

$\boxed{n = 2}$: $\sigma = (1\,2)$. $A_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

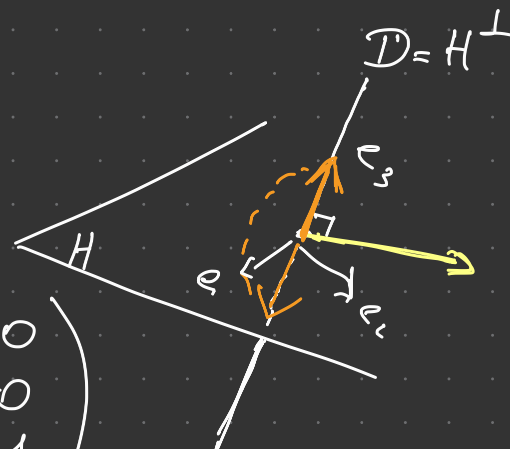


$$A_\sigma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$A_\sigma \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

<u>Q</u> : Que fait $\rho_{H_{ij}}$ sur les vecteurs de base $\{e_k\}$?

$$H_{ij} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_i = x_j \right\}.$$



$$= \operatorname{Ker} \phi_{ij}$$

$$\phi_{ij}(x) = x_i - x_j. \quad \operatorname{Mat}_{(e_i)}(\rho_H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H_{ij} = v_{ij}^{\perp} \quad \text{où} \quad v_{ij} \in \mathrm{Vect}(e_i, e_j).$$

$$v_{ij} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array} = e_i - e_j$$

$$x_i - x_j = \langle x, e_i \rangle - \langle x, e_j \rangle$$

$$= \langle x, e_i - e_j \rangle = 0$$

$$H_{ij} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, e_i - e_j \rangle = 0 \} = v_{ij}^{\perp}$$

$$\rho_{H_{ij}}(x) = x - \cancel{2} \frac{\langle x, v_{ij} \rangle}{\cancel{2} \langle v_{ij}, v_{ij} \rangle} \cdot v_{ij}.$$

$$\| v_{ij} \|^2 = 2$$

$$\rho_{H_{ij}}(e_k) = e_k - 2 \frac{\langle e_k, e_i - e_j \rangle}{2} \cdot v_{ij}.$$

Si $k \notin \{i, j\}$, $\rho_{H_{ij}}(e_k) = e_k$.

$$\rho_{H_{ij}}(e_i) = e_i - \langle e_i, e_i - \cancel{e_j} \rangle \cdot (e_i - e_j)$$

$$= e_i - (e_i - e_j) = e_j.$$

$$\rho_{H_{ij}}(e_j) = e_j - \langle e_j, e_i - e_j \rangle (e_i - e_j).$$

$$= e_j + e_i - e_j = e_i$$

$$\rho_{H_{ij}}(e_k) = \begin{cases} e_k & \text{si } k \notin \{i,j\} \\ e_j & \text{si } k = i \\ e_i & \text{si } k = j. \end{cases}$$

$$= A_\sigma(e_k) \quad , \quad \text{où } \sigma = (ij).$$

<u>CCL</u> : $\rho_{H_{ij}} = A_\sigma$.

3. d. Si $\{i,j\} \cap \{k,\ell\} = \emptyset$.

$$\langle e_i - e_j, e_k - e_\ell \rangle = \cancel{\langle e_i, e_k \rangle} - \cancel{\langle e_i, e_\ell \rangle} - \cancel{\langle e_j, e_k \rangle} + \cancel{\langle e_j, e_\ell \rangle}$$
$$= 0$$

$v_{ij} \perp v_{k\ell}$.

3. e. D'après l'ex 2., si $\{i,j\} \cap \{k,\ell\} = \emptyset$, alors

$$\rho_{H_{ij}} \rho_{H_{k\ell}} = \rho_{H_{k\ell}} \rho_{H_{ij}}$$

$(1\,2)$ $\quad (1\,2)(2\,3)$,

$(3\,4)$

$= \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases}$

$(3\,1\,2)$

$(2\,3)(1\,2)$

$(1\,3\,2)$

$\sigma_{ij} = (ij) \qquad \sigma_{k\ell} = (k\ell)$

$$A_{\sigma_{ij}} A_{\sigma_{k\ell}} = A_{\sigma_{k\ell}} A_{\sigma_{ij}}$$

$$A_{\sigma_{ij}\sigma_{k\ell}} = A_{\sigma_{k\ell}\sigma_{ij}} \quad (3.b)$$

$\underbrace{\quad}_{=}$

Or, on sait que deux permutations à supports disjoints commutent.