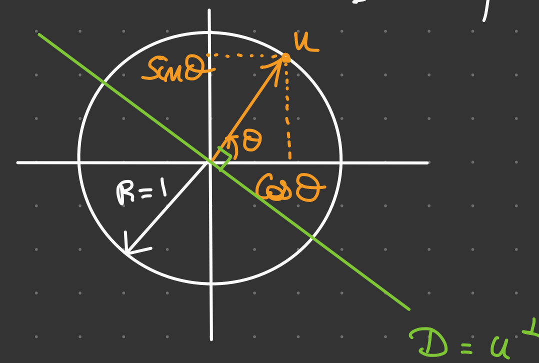
Exercice 1

1 a) Une b.o.n. de $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est une base (u, v) de $\mathbb{R}^2$ tq $\|u\| = \|v\| = 1$ et $\langle u, v \rangle = 0$.

Tout vecteur de norme 1 de $\mathbb{R}^2$ se met sous la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$.



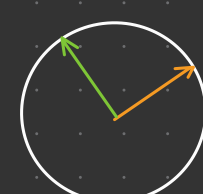
C'est le cas pour u, et on a un θ tq $u = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, et θ est unique mod. 2π.

Maintenant, v est un vecteur unitaire de la droite $D = u^\perp$. D est dirigée (entre autre !) par le vecteur $\underbrace{\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}}_{=: v_0}$, qui est également $\|v_0\| = 1$.

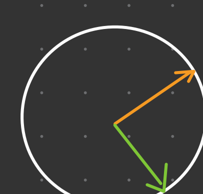
Comme $v \in D$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$: $v = \lambda v_0$,
et $\|v\| = |\lambda| . \|v_0\| = |\lambda| = 1$, d'où $\lambda \in \{1, -1\}$.
Ainsi, on a nécessairement $v = v_0$ ou $-v_0$, et inversement (u, v_0) et $(u, -v_0)$ sont des b.o.n. de $\mathbb{R}^2$.

CCL : Les b.o.n. de $\mathbb{R}^2$ sont les :

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right), \theta \in \mathbb{R} \right\}$$ et



$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix} \right), \theta \in \mathbb{R} \right\}$$



1b) Soit (u,v) une base de $\mathbb{R}^2$. Notons $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.
Ainsi, (u,v) est orthonormée <u>ssi</u>

$$(O.N.)\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 = 1 \\ v_1^2 + v_2^2 = 1 \\ u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0 \end{cases}.$$

La matrice $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ vérifie

$$^t\mathcal{M}\mathcal{M} = \begin{pmatrix} u_1^2 + u_2^2 & u_1 v_1 + u_2 v_2 \\ u_1 v_1 + u_2 v_2 & v_1^2 + v_2^2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $^t\mathcal{M}\mathcal{M} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est équivalent à $(O.N.)$.

i.e. $\mathcal{M} \in O_2(\mathbb{R}) \iff (u,v)$ est orthonormée.
Struct. de gp sur $O_2(\mathbb{R})$: cf. cours.

1.c. Soit (u,v) une b.o.n. de $\mathbb{R}^2$. Notons $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$
$v = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$ comme avant. On a alors

$$\det_{b.c.}(u,v) = \underbrace{\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}}_{= \mathcal{M}}.$$

On sait que $\mathcal{M} \in O_2(\mathbb{R})$, soit $^t\mathcal{M}\mathcal{M} = I_2$.
D'où $\det(^t\mathcal{M}\mathcal{M}) = (\det \mathcal{M})^2 = \det(I_2) = 1$.
D'où $\det_{b.c.}(u,v) \in \{-1, 1\}$.

1.d) D'après la 1.a), une bon est de la forme

$$\underbrace{\left(\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}\right)} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\left(\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sin\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix}\right)}, \ \theta \in \mathbb{R}.$$

$\det_{b.c} = \cos^2 + \sin^2\theta = 1$ $\qquad$ $\det_{b.c} = -\cos^2\theta - \sin^2\theta = -1.$

↳ directe $\qquad$ ↳ indirecte

Identifions $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ de la façon usuelle. Alors, le cercle unité s'identifie aux nombres complexes de module $= 1$: $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$.

Soit $\Phi : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \{\text{b.o.n.d de } \mathbb{R}^2\}$

$$e^{i\theta} \longmapsto \left(\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}\right).$$

Φ est bien définie car $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ ssi $\theta = \theta' [2\pi]$ et $\cos, \sin$ sont 2π-périodiques.

Elle est surjective d'après ce qu'on vient de dire.

Elle est injective car si $\Phi(e^{i\theta}) = \Phi(e^{i\theta'})$, alors en considérant la 1ère colonne, on a $\begin{cases}\cos\theta = \cos\theta'\\ \sin\theta = \sin\theta'\end{cases}$ soit $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$.

Φ est donc bijective.

i.e. L'ensemble des b.o.n.d. de $\mathbb{R}^2$ s'identifie à

$$SO_2(\mathbb{R}) = \{M \in O_2(\mathbb{R}) \mid \det M = 1\}.$$

$SO_2(\mathbb{R})$ est un sous-gp. de $O_2(\mathbb{R})$ car c'est le noyau du morphisme $\det|_{O_2(\mathbb{R})} : O_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \{\pm 1\}$.

D'après 1.d), $SO_2(\mathbb{R})$ s'identifie au cercle unité $\mathbb{S}^1$, et ce dernier hérite donc d'une structure de groupe, telle que l'identification soit un isomorphisme de groupes.

Bien sûr, cette structure est la même que la structure multiplicative sur $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$.

Pour le voir, en notant $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, on calcule

$$R_{\theta_1} \cdot R_{\theta_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 & -\sin\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_2 \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_2 \cos\theta_1 & \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$= R_{\theta_1 + \theta_2}$$

d'après les formules de trigonométrie.