f2 ex6 : $A \in M_n(\mathbb{R})$

${}^tAA$ est symétrique puisque ${}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA$

(On utilise les égalités ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ et ${}^t({}^tA) = A$.)

Soit λ une valeur propre de ${}^tAA$ et $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre non nul pour λ. (On sait qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$). Alors $\langle x, {}^tAAx\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \lambda \|x\|^2$ d'une part

$= \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2$ d'autre part

Comme $x \neq 0$, $\|x\| \neq 0$ et on obtient $\lambda = \dfrac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} \geq 0$

Si A est elle même symétrique alors A est diagonalisable dans une BON. Soit P la matrice des coordonnées d'une BON de diagonalisation de A. On a $AP = PD$ avec D diagonale, donc $A = PDP^{-1} = PD\,{}^tP$

puis ${}^tAA = {}^t(PD\,{}^tP)\,PD\,{}^tP = PD\,\underbrace{{}^tPP}_{I}\,D\,{}^tP = P\,D^2\,{}^tP = PD^2P^{-1}$

de sorte que ${}^tAA$ est diagonalisable dans la même BON de diagonalisation que A et de valeurs propres le carré des valeurs propres de A.

ex7 $S \in M_n(\mathbb{R})$, on veut montrer S symétrique positive $\Leftrightarrow \exists A \in M_n(\mathbb{R})$, $S = {}^tAA$

($\Leftarrow$) a été vu ds l'ex 6.

($\Rightarrow$) Il existe une BON de diagonalisation de S. Soit P la matrice des coordonnées des vecteurs de cette base, on a $S = PD\,{}^tP$ avec D diagonale à coef. positifs puisque S est positive. On peut alors prendre $A = PD'\,{}^tP$ avec D' diagonale dont les coef. sont les racines carré de ceux de D

A est symétrique donc $S = {}^tAA = A^2$.

S est définie positive $\Leftrightarrow$ D est à coef. diagonaux > 0 $\Rightarrow$ D est inversible $\Rightarrow A$

Réciproquement si A est inversible alors pour x vecteur propre $\neq 0$ de ${}^tAA$ on a $\frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} > 0$ donc 0 n'est pas valeur propre de ${}^tAA$ (cf ex 6)

donc ${}^tAA$ est définie positive.

c) S symétrique positive. On a déjà vu l'existence de R symétrique positive tq $R^2 = S$

Unicité : Soit x un vecteur propre $\neq 0$ de S associé à une valeur propre λ (≥ 0 par hypothèse). On va montrer $Rx = \sqrt{\lambda}\, x$ ce qui prouve l'unicité de R puisqu'il existe une base formée de vecteurs propres de S

Si Rx est colinéaire à x, $Rx = \mu x$, alors $R^2 x = \mu^2 x$
$$= Sx = \lambda x$$

donc $\mu^2 = \lambda$ et comme R est positive, $\mu \geq 0$ donc $\mu = \sqrt{\lambda}$

Si Rx n'est pas colinéaire à x alors $\mathrm{Vect}(x, Rx)$ est un plan stable par R (puisque $RRx = Sx = \lambda x$) dont (x, Rx) est une base.

La matrice de l'endomorphisme $x \mapsto Rx$ dans la base (x, Rx) est $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de déterminant $-\lambda$. Si $\lambda \neq 0$ alors $-\lambda < 0$ donc $x \mapsto Rx$ admet une (au moins) valeur propre < 0 ce qui contredit R positive.

Si $\lambda = 0$ $R^2\big|_{\mathrm{Vect}(x,Rx)} = 0$ et comme $R\big|_{\mathrm{Vect}(x,Rx)}$ est diagonalisable, $R = 0$

ce qui contredit Rx non colinéaire à x