# Exercices sur la dualité

*On désigne par* $\mathrm{K}$ *un corps commutatif, et par* $\mathbf{M}_n(\mathrm{K})$ *l'espace des matrices carrées d'ordre* $n$ *à coefficients dans* $\mathrm{K}$.

1) Soient $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel réel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $\mathrm{V}$ un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{F}$. Les formes linéaires $f \mapsto f(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$, engendrent-elles $\mathrm{V}^*$ ?

*Application* : montrer qu'il existe des nombres réels $x_1, \ldots, x_n$ tels que l'application $f \mapsto (f(x_1), \ldots, f(x_n))$ soit un isomorphisme de $\mathrm{V}$ sur $\mathbb{R}^n$.

2) Soit $\mathrm{E}$ un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathrm{K}$, et $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des formes linéaires sur $\mathrm{E}$. Montrer que $\varphi$ est combinaison linéaire de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ si et seulement si $\operatorname{Ker} \varphi \supset \bigcap \operatorname{Ker} \varphi_i$.

3) Quel est le déterminant de l'endomorphisme $\mathrm{A} \mapsto {}^t\mathrm{A}$ de $\mathbf{M}_n(\mathrm{K})$ ?

4) Soient $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathrm{K})$. La matrice ${}^t\mathrm{A}$ est-elle semblable à $\mathrm{A}$ ?

5) a) Pour $\mathrm{L} \in \mathbf{M}_n(\mathrm{K})$, on note $t_{\mathrm{L}}$ la forme linéaire $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{LA})$ sur $\mathbf{M}_n(\mathrm{K})$. Montrer que l'application $\mathrm{L} \mapsto t_{\mathrm{L}}$ est un isomorphisme de $\mathbf{M}_n(\mathrm{K})$ sur son dual.

b) Soit $\ell$ une forme linéaire sur $\mathbf{M}_n(\mathrm{K})$, telle que $\ell(\mathrm{AB}) = \ell(\mathrm{BA})$ pour $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbf{M}_n(\mathrm{K})$. Montrer que $\ell$ est proportionnelle à la trace (utiliser a).

c) En déduire que le sous-espace de $\mathbf{M}_n(\mathrm{K})$ engendré par les matrices de la forme $\mathrm{AB} - \mathrm{BA}$ est l'ensemble des matrices de trace nulle.