Exercices sur groupes et actions de groupes

Exercices "classiques"

1) Soient G un groupe fini, p le plus petit nombre premier divisant l'ordre de G. Montrer que tout sous-groupe H d'indice p de G est distingué (étudier l'image de G dans le groupe des permutations de G/H).

2) Soit G un groupe dont tous les eléments sont d'ordre ≤ 2.

a) Montrer que G est commutatif.

b) Définir sur G une structure d'espace vectoriel sur le corps à deux éléments. En déduire que si G est fini, il est isomorphe à un groupe $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$.

3) Soient G un groupe, H un sous-groupe distingué de G, contenu dans le centre de G, et tel que le quotient G/H soit cyclique. Montrer que G est commutatif.

Application : montrer qu'un groupe d'ordre p^2 est commutatif.

4) Soient K un corps commutatif, G l'ensemble des matrices à coefficients dans K de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que G est un sous-groupe du groupe linéaire $\mathrm{GL}(3,\mathrm{K})$. Trouver son centre Z, et identifier le groupe G/Z. Comparer avec l'exercice précédent (par exemple quand $\mathrm{K} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$).

5) Soit G un groupe d'ordre $2n$, avec n impair. Montrer que G contient un sous-groupe distingué d'ordre n (montrer que G admet un élément σ d'ordre 2, et considérer la signature de la permutation $g \mapsto \sigma g$ de G).

6) Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble fini X; on note $|\mathrm{G}|$ le nombre d'éléments de G. Pour $g \in \mathrm{G}$, on note $f(g)$ le nombre de points de X fixés par g.

a) Démontrer que le nombre d'orbites de G dans X est égal à $\dfrac{1}{|\mathrm{G}|}\displaystyle\sum_{g\in\mathrm{G}} f(g)$ ("lemme de Burnside": compter les couples $(g,x) \in \mathrm{G}\times\mathrm{X}$ tels que $gx = x$ en projetant sur G, puis sur X).

b) On suppose $\mathrm{Card}(\mathrm{X}) \geq 2$. Prouver l'inégalité $\displaystyle\sum_{g\in\mathrm{G}} f(g)^2 \geq 2\,|\mathrm{G}|$ (appliquer a) à $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$). Quand a-t-on égalité?

c) On suppose désormais que G agit transitivement sur X; soit H le stabilisateur d'un point de X. Soit G_0 l'ensemble des éléments de G qui ne fixent aucun point de X. Démontrer l'inégalité $\mathrm{Card}(\mathrm{G}_0) \geq \mathrm{Card}(\mathrm{H})$. *Indication* : majorer la somme $\sum_{g\in\mathrm{G}}(f(g)-1)(f(g)-\mathrm{Card}(\mathrm{X}))$ par $\mathrm{Card}(\mathrm{X})\cdot\mathrm{Card}(\mathrm{G}_0)$, puis la minorer à l'aide de a) et b).

d) Soient G un groupe fini et H un sous-groupe strict de G. Montrer que la réunion des conjugués de H n'est pas égale à G, et plus précisément que son cardinal est $\leq \mathrm{Card}(G) - \mathrm{Card}(H)$ (traduire c).

e) Donner un exemple de groupe (infini) G avec un sous-groupe $H \neq G$ tel que G soit réunion des conjugués de H (la géométrie en fournit plusieurs, pensez à la diagonalisation ou à la triangularisation).

Questions posées à l'oral

1) Trouver tous les sous-groupes d'ordre 15, 20 ou 30 de $\mathfrak{A}_5$.

2) Le groupe $\mathfrak{S}_n$ est-il isomorphe à $\mathfrak{A}_n \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$? à un groupe diédral D_{2m} ?

3) Soit G un groupe fini, plongé dans l'ensemble de ses permutations. À quelle condition l'image est contenue dans le groupe $\mathfrak{A}_G$ des permutations alternées?

4) Existe-t-il une injection de $\mathfrak{S}_3$ dans $\mathfrak{A}_4$?

5) Existe-t-il une surjection de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathfrak{S}_{n-1}$?

6) Décrire les classes de conjugaison de $\mathfrak{A}_5$.

7) Décrire les sous-groupes de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.