Exercices sur groupes linéaires et orthogonaux

On désigne par K un corps commutatif.

Questions d'oral

1) Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ tel que $g^2 = \mathrm{I}$ pour tout $g \in \mathrm{G}$. Quel est le maximum du cardinal de G ? En déduire que les groupes $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ ne sont pas isomorphes si $n \neq m$. Même question si $\mathbb{C}$ est remplacé par un corps quelconque.

2) Quel est le groupe $\mathrm{SO}(2, \mathrm{K})$?

Indication : distinguer 2 cas, suivant que -1 est un carré ou non dans K.

3) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux réflexions commutent.

4) Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$. Quelle est la signature de la permutation de $\mathbb{F}_q^n$ définie par M ? (si $n = 2$, on pourra supposer $q \geq 4$).

Indication : utiliser $\mathrm{D}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$.

Exercices "classiques"

1) Soit E un espace vectoriel de dimension n sur K.

a) À quelle condition sur n et K l'extension

$$1 \to \mathrm{SL(E)} \to \mathrm{GL(E)} \xrightarrow{\det} \mathrm{K}^* \to 1$$

est-elle triviale ? (on pourra considérer une section). Donner des exemples.

b) Même question (et méthode analogue) pour l'extension

$$1 \to \mathrm{K}^* \longrightarrow \mathrm{GL(E)} \longrightarrow \mathrm{PGL(E)} \to 1 \ .$$

Cette extension admet-elle une section ?

2) Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur K et H un hyperplan de E. On note $\mathrm{D(H)}$ le sous-groupe de $\mathrm{GL(E)}$ formé des automorphismes u tels que $u(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{H}$, et $\mathrm{T(H)}$ le sous-groupe $\mathrm{D(H)} \cap \mathrm{SL(E)}$.

a) Montrer que le groupe $\mathrm{T(H)}$ est isomorphe au groupe additif de H, et $\mathrm{D(H)}$ au produit semi-direct de K^* par H, avec une action que l'on précisera.

b) Décrire le groupe dérivé de $\mathrm{D(H)}$.

c) Décrire le normalisateur et le centralisateur de $\mathrm{D(H)}$ et de $\mathrm{T(H)}$ dans $\mathrm{GL(E)}$.

3) a) Rappeler pourquoi le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_3)$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$.

b) On considère le groupe $\mathrm{G} = \mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_3)$. Chercher les éléments d'ordre 2 de G . En déduire que l'extension

$$\{\pm 1\} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow \mathfrak{A}_4$$

n'admet pas de section.

c) Montrer que G n'est pas isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

d) Soit $\mathrm{V}_4 \subset \mathfrak{A}_4$ le groupe de Klein (isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$). Définir une extension

$$\{\pm 1\} \longrightarrow \mathrm{D(G)} \longrightarrow \mathrm{V}_4 \ ,$$

et en déduire que $\mathrm{D(G)}$ est isomorphe au groupe quaternionien $\mathrm{Q} = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$.

d) Prouver que G est produit semi-direct de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ par Q , pour une action de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sur Q que l'on précisera.

4) a) Montrer que les groupes simples $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{F}_4)$ et $\mathrm{PSL}(4, \mathbb{F}_2)$ ont même ordre.

b) Montrer que $\mathrm{PSL}(4, \mathbb{F}_2)$ contient deux classes de conjugaison distinctes d'éléments d'ordre 2 , qu'on décrira par leur forme de Jordan.

c) Montrer que tout élément d'ordre 2 de $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{F}_4)$ est la classe d'une transvection. En déduire que les deux groupes ne sont pas isomorphes.

5) Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur K et q une forme quadratique non dégénérée sur E . On dit qu'un élément u de $\mathrm{GL(E)}$ est une *similitude* s'il existe un scalaire $\mu(u)$ tel qu'on ait $q(u(x)) = \mu(u)q(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$; on dit que $\mu(u)$ est le multiplicateur de u . On note $\mathrm{GO}(q)$ le groupe des similitudes de E . On a une suite exacte

$$1 \to \mathrm{O}(q) \longrightarrow \mathrm{GO}(q) \xrightarrow{\mu} \mathrm{K}^* \ .$$

a) Montrer que l'image de μ est formée des éléments λ de K^* tels que les formes q et λq soient équivalentes (i.e. il existe $v \in \mathrm{GL(E)}$ tel que $\lambda q = q \circ v$).

b) On suppose $\mathrm{K} = \mathbb{R}$. Montrer que l'image de μ est égale à $\mathbb{R}_+^*$, sauf si q est de signature (p, p) .

c) Sauf dans ce cas exceptionnel, définir un isomorphisme $\mathrm{GO}(q) \xrightarrow{\sim} \mathrm{O}(q) \times \mathbb{R}_+^*$.

6) On munit l'espace $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel, et l'espace $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\mathrm{M}\| = \sup_{\|x\|=1} \|\mathrm{M}x\|$. Soit B la boule unité de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer qu'une matrice orthogonale est un élément extrémal de B (sinon elle s'écrit $\frac{1}{2}(\mathrm{M}+\mathrm{N})$, avec $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathrm{B}$, $\mathrm{M} \neq \mathrm{N}$; en appliquant à un vecteur x en déduire une contradiction).

b) Calculer $\|\mathrm{M}\|$ en fonction de la décomposition polaire de M .

c) Montrer que les éléments extrémaux de la boule unité de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sont les matrices orthogonales.

d) En déduire que cette boule est l'enveloppe convexe de $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$.

7) a) Soit G un groupe opérant sur un ensemble X , et soit $x \in \mathrm{X}$. Montrer que le normalisateur de $\mathrm{Stab}(x)$ dans G est l'ensemble des $g \in \mathrm{G}$ tels que $\mathrm{Stab}(gx) = \mathrm{Stab}(x)$.

b) On suppose $\mathrm{Card}(\mathrm{K}) \geq 3$. Soit D le sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathrm{K})$ formé des matrices diagonales. Décrire le normalisateur de D dans $\mathrm{GL}(n, \mathrm{K})$ (on montrera que c'est un produit semi-direct ; on pourra supposer dans un premier temps K infini).

c) Soit T le sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathrm{K})$ formé des matrices triangulaires supérieures. Montrer que T est son propre normalisateur (on pourra voir T comme le stabilisateur d'un drapeau).

Extrait de problème (1980)

Soit K un corps commutatif, n un entier ≥ 2. On désigne par L_n le sous-ensemble du groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ formé des matrices dont chaque colonne contient un seul terme non nul, par S_n (resp. Δ_n) l'ensemble des éléments de L_n dont tous les coefficients non nuls valent 1 (resp. sont situés sur la diagonale principale), par Σ_n le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$.

a) Pour $\sigma \in \Sigma_n$, on note A_σ la matrice carrée d'ordre n dont, pour $i, j = 1, \ldots, n$, l'élément (i, j) vaut 1 si $i = \sigma(j)$ et 0 sinon. Vérifier que l'application $\sigma \mapsto \mathrm{A}_\sigma$ est un homomorphisme de Σ_n dans $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ et une bijection de Σ_n sur S_n.

b) Établir que tout élément A de L_n s'écrit, de manière unique, sous la forme $\mathrm{A} = \mathrm{DA}_\sigma$, $\sigma \in \Sigma_n$ et $\mathrm{D} \in \Delta_n$, puis que L_n est un sous-groupe de GL_n. Δ_n (resp. S_n) est-il un sous-groupe distingué de L_n ?

c) Déduire de ce qui précède, à l'aide d'une méthode de dénombrement que l'on détaillera, que pour tout nombre premier $q \geq 2$ et tout entier naturel m, $m!(q-1)^m$ divise $(q^m - 1)(q^m - q) \ldots (q^m - q^{m-1})$.

d) Calculer le déterminant de A_σ.

e) On suppose désormais que K est algébriquement clos. On note μ_σ le polynôme minimal de A_σ et χ_σ son polynôme caractéristique. Dans le cas particulier où σ est un cycle d'ordre n, établir que $\mu_\sigma(\mathrm{T}) = \mathrm{T}^n - 1$; que vaut alors $\chi_\sigma(\mathrm{T})$? Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur n et la caractéristique p de K, pour que A_σ soit diagonalisable ; lorsque cette condition est vérifiée, expliciter $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ et $\mathrm{D} \in \Delta_n$ tels que $\mathrm{A}_\sigma = \mathrm{PDP}^{-1}$.

f) σ étant maintenant un élément quelconque de Σ_n, déterminer μ_σ et χ_σ.