Panorama sur groupes et actions de groupes

Les crochets autour d'une notion (*exemple*: [extension]) *indiquent qu'elle ne figure pas explicitement au programme.*

1. Groupes, homomorphismes de groupes. Isomorphisme.

Avoir en tête : Beaucoup d'exemples (groupes commutatifs, groupes de permutation, groupes linéaires, ...; exponentielle, déterminant, ...)

Retenir : Un isomorphisme de groupes préserve toutes les notions de la théorie des groupes (centre, sous-groupe dérivé, ...)

2. Sous-groupes, relation d'équivalence associée à un sous-groupe $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$, *ensemble* quotient G/H.

Connaître : – Sous-groupes de $\mathbb{Z}$, sous-groupes fermés de $\mathbb{R}$.

– Lagrange: $\mathrm{Card}(\mathrm{H}) \cdot \mathrm{Card}(\mathrm{G}/\mathrm{H}) = \mathrm{Card}(\mathrm{G})$. Ordre d'un élément (application: "petit" théorème de Fermat).

Attention : Lorsque H n'est pas distingué, G/H n'est pas un groupe, seulement un G-ensemble. Attention aussi au produit HK de sous-groupes, qui n'est pas pas un sous-groupe en général.

3. Sous-groupes distingués, groupes quotients.

Connaître : Le théorème d'isomorphisme ($\mathrm{G}/\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im} f$). Les sous-groupes de G/H.

4. Action d'un groupe sur un ensemble.
Vocabulaire: orbite, stabilisateur, action transitive.

Avoir en tête : Beaucoup d'exemples géométriques: similitude des matrices (ou des endomorphismes), réduction des formes quadratiques, action de $\mathrm{GL}(\mathrm{V})$ sur les sous-espaces de V, ...

Connaître : Le théorème de structure des G-ensembles ($\mathrm{G}.x \xrightarrow{\sim} \mathrm{G}/\mathrm{Stab}(x)$). Son corollaire l'*équation aux classes* : $\mathrm{Card}(\mathrm{X}) = \sum_{\bar{x} \in \mathrm{X}/\mathrm{G}} \mathrm{Card}(\mathrm{G})/\mathrm{Card}(\mathrm{Stab}(x))$.

5. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

Connaître : – La décomposition d'un élément en cycles à support disjoints; applications (ordre d'une permutation, classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$). $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions.

– Le théorème de la signature.

6. [Extensions], produit direct, [produit semi-direct]

Connaître : Les critères pour que:

- un groupe G soit produit direct (resp. semi-direct) de deux sous-groupes;
- un groupe G soit isomorphe à $\mathrm{H} \times \mathrm{G}/\mathrm{H}$ (resp. $\mathrm{H} \rtimes \mathrm{G}/\mathrm{H}$).
- des exemples: groupe diédral, groupe affine, ...

7. Groupes commutatifs, [sous-groupe dérivé, groupes résolubles]

Connaître : – Tout groupe commutatif fini (ou de type fini) est produit de groupes cycliques.

- $\mathfrak{S}_n$ est résoluble pour $n \leq 4$, pas pour $n \geq 5$.

8. [p-groupes, sous-groupes de Sylow]

Connaître : – un p-groupe a un centre non trivial;

- les théorèmes de Sylow. Application: groupes d'ordre pq.

9. Sous-groupes discrets de $\mathbb{R}^n$, réseaux.

Connaître : Les sous-groupes discrets de $\mathbb{R}^n$ sont les réseaux des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$.

Partie correspondante du programme:

Les différentes notions de théorie des groupes introduites dans les paragraphes suivants seront illustrées et appliquées dans des situations géométriques :

1. Groupes, morphismes de groupe. Produit direct de groupes. Sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Ordre d'un élément. Sous-groupes distingués (ou normaux), groupes quotients. Opération d'un groupe sur un ensemble. Stabilisateur d'un point, orbites, espace quotient. Formule des classes. Classes de conjugaison.
2. Groupes cycliques. Groupes abéliens de type fini. Sous-groupes discrets d'un espace vectoriel réel. Réseaux. Groupe des racines complexes énièmes de l'unité, racines primitives.
3. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions, en produit de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné.
4. Groupes classiques: groupe général linéaire, groupe spécial linéaire; groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal; groupe unitaire, groupe spécial unitaire.
5. Groupe affine. Groupe des homothéties-translations. En dimension 2 ou 3, groupe des isométries laissant stable une partie de l'espace.

Leçons d'oral concernées:

101. Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
102. Sous-groupes discrets de $\mathbb{R}^n$. Réseaux.
103. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.
104. Groupes finis. Exemples et applications.
105. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
106. Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de GL(E). Applications.
107. Sous-groupes finis de O(2,R), de O(3,R). Applications.
108. Exemples de parties génératrices d'un groupe.
114. Groupe des nombres complexes de module 1. Applications.
131. Exemples de décompositions remarquables dans le groupe linéaire. Applications.
136. Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Formes réduites. Applications.
142. Utilisation des groupes en géométrie.

Quelques références :

D. Perrin, Cours d'Algèbre (Ellipses) (agréable à lire, mais niveau avancé)

N. Bourbaki: Algèbre, ch. I (très précis, démonstrations élégantes et économiques, mais il faut savoir y choisir ce que l'on veut)

M. Artin, Algebra (très bon livre général d'algèbre, malheureusement (?) en anglais)

Beaucoup de livres standard orientés vers l'Agrégation : Guin, Tauvel, ...